Seconde 2

Corrigé du devoir de mathématiques

Fait le 03/03

1

Exercice 1 (7)

$f(x)=(6x+1)(-4x-3)+8(8x-1)+2$

1) $f(x)=-24x^2-18x-4x-3+64x-8+2$ 1

$=\underline{-24x^2+42x-9}$

2) $\underline{3(-4x+1)(2x-3)}=3(-8x^2+12x+2x-3)$

$=-24x^2+42x-9=\underline{f(x)}$

3) $\underline{-24\left(x-\frac{7}{8}\right)^2+\frac{75}{8}}=-24\left(x^2-2x\times\frac{7}{8}+\frac{49}{64}\right)+\frac{75}{8}$

$=-24x^2+24\times x\times\frac{7}{4}-\frac{24\times 49}{64}+\frac{75}{8}$

$=-24x^2+42x-\frac{3\times 49}{8}+\frac{75}{8}$

$=-24x^2+42x-\frac{147}{8}+\frac{75}{8}$

$=-24x^2+42x-\frac{72}{8}=-24x^2+42x-9=\underline{f(x)}$

4) a) $f\left(-\frac{1}{6}\right)=\underbrace{\left(\underbrace{6\times\left(-\frac{1}{6}\right)+1}_{=0}\right)\left(-4\times\left(-\frac{1}{6}\right)-3\right)}_{=0}+8\left(8\times\left(-\frac{1}{6}\right)-1\right)+2$

$=8\times\left(-\frac{4}{3}-\frac{3}{3}\right)+2=-\frac{56}{3}+\frac{6}{3}=\boxed{-\frac{50}{3}}$

b) x antécédent de 0 par f $\iff f(x)=0 \iff 3(-4x+1)(2x-3)=0$

$\iff -4x+1=0$ ou $2x-3=0$

$\iff x=\frac{1}{4}$ ou $x=\frac{3}{2}$

c) $\underline{f(x)=\frac{75}{8}} \iff -24\left(x-\frac{7}{8}\right)^2+\frac{75}{8}=\frac{75}{8} \iff -24\left(x-\frac{7}{8}\right)^2=0$

$\iff x-\frac{7}{8}=0$

$\iff x=\frac{7}{8}$ d'où $\boxed{S=\left\{\frac{7}{8}\right\}}$

5) $f(x)=3(-4x+1)(2x-3)<0$?

$-4x+1\geq 0$

$\iff -4x\geq -1$

$\iff x\leq\frac{1}{4}$

$2x-3\geq 0$

$\iff 2x\geq 3$

$\iff x\geq\frac{3}{2}$

D'où le tableau de signes de f

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Signe de $-4x+1$		$+$	0	$-$	|	$-$	
Signe de $2x-3$		$-$	|	$-$	0	$+$	
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

D'où :

$\boxed{S=\left]-\infty;\frac{1}{4}\right[\cup\left]\frac{3}{2};+\infty\right[}$

Exercice 2 : /16 $A(6;-3)$ $B(4;4)$ $C(-3;2)$ $D(-1;-5)$

1) a) M milieu de $[AC]$: $x_M = \dfrac{x_A+x_C}{2} = \dfrac{6+(-3)}{2} = \dfrac{3}{2}$; $y_M = \dfrac{y_A+y_C}{2} = \dfrac{-3+2}{2} = -\dfrac{1}{2}$ $\boxed{M\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)}$

b) N milieu de $[BD]$: $x_N = \dfrac{x_B+x_D}{2} = \dfrac{4+(-1)}{2} = \dfrac{3}{2}$; $y_N = \dfrac{y_B+y_D}{2} = \dfrac{4+(-5)}{2} = -\dfrac{1}{2}$ $\boxed{N\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)}$

d'où $M = N$

Le quadrilatère ABCD a ses diagonales qui se coupent en leur milieu.

Donc ABCD est un parallélogramme.

2) a) $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} = \sqrt{(4-6)^2+(4-(-3))^2} = \sqrt{(-2)^2+7^2} = \sqrt{4+49} = \sqrt{53}$

$BD = \sqrt{(x_D-x_B)^2+(y_D-y_B)^2} = \sqrt{(-1-4)^2+(-5-4)^2} = \sqrt{(-5)^2+(-9)^2} = \sqrt{25+81} = \sqrt{106}$

$AD = \sqrt{(x_D-x_A)^2+(y_D-y_A)^2} = \sqrt{(-1-6)^2+(-5+3)^2} = \sqrt{(-7)^2+(-2)^2} = \sqrt{49+4} = \sqrt{53}$

$BD^2 = AB^2 + AD^2$ – D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABD est rectangle en A (De plus : $AB = AD$, donc ABD est aussi isocèle en A)

b) ABCD est un parallélogramme avec un angle droit, donc ABCD est un rectangle

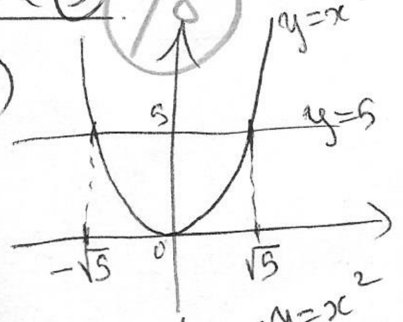
3) $AB = AD$ (voir 2a))

ABCD est donc un rectangle avec deux côtés consécutifs égaux.

Donc ABCD est un carré

Exercice 3 : /8

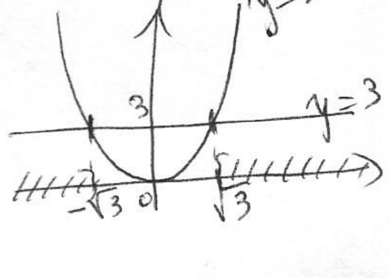
1) a)



Les solutions de $x^2 = 5$ sont les abscisses des points d'intersection de la parabole avec la droite d'équation $y = 5$

$S = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$

b)



Les solutions de l'inéquation $x^2 \geq 3$ sont les abscisses des points de la parabole situés au-dessus de la droite d'équation $y = 3$

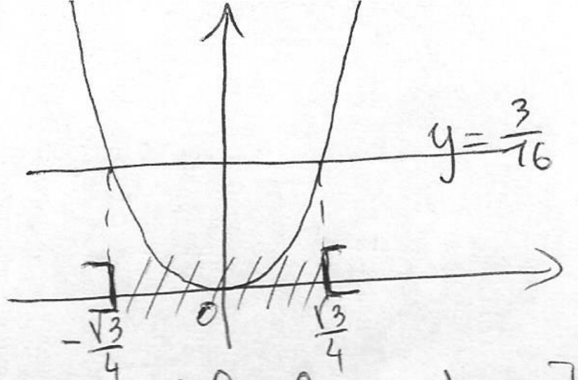
d'où $S =]-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; +\infty[$

c) $15x^2-2<-x^2+1$

$\iff 15x^2+x^2<1+2$

$\iff 16x^2<3$

$\iff x^2<\frac{3}{16}$



Les solutions sont les abscisses des points de la parabole situés strictement en-dessous de la droite d'équation $y=\frac{3}{16}$

D'où $S=]-\frac{\sqrt{3}}{4};\frac{\sqrt{3}}{4}[$

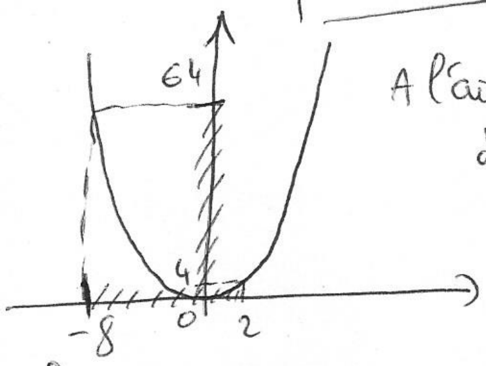
2) a) $7\le x\le 10$, d'où $7^2\le x^2\le 10^2$ car la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

d'où $\boxed{49\le x^2\le 100}$

b) $-5<x\le -1$, d'où $(-1)^2\le x^2<(-5)^2$ car la fonction carré est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$

d'où $\boxed{1\le x^2\le 25}$

c) $-8\le x\le 2$



A l'aide de la représentation graphique de la fonction carré :

$\boxed{0\le x^2\le 64}$

3) Par lecture graphique : $S(3;5)$: sommet de la parabole

Forme canonique de f : $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta=a(x-3)^2+5$

Or, $f(0)=-4 \iff a(0-3)^2+5=-4 \iff 9a+5=-4$

$\iff 9a=-9$

$\iff a=-1$.

D'où $f(x)=-(x-3)^2+5=-(x^2-6x+9)+5=-x^2+6x-4$

Exercice 4 : 4 $E(11;-3)$, $F(8;-3+3\sqrt{3})$ $G(2;-3+3\sqrt{3})$

1) Voir repère

2) $EF=\sqrt{(x_F-x_E)^2+(y_F-y_E)^2}=\sqrt{(8-11)^2+(\cancel{-3}+3\sqrt{3}\cancel{+3})^2}=\sqrt{9+27}=\sqrt{36}=6$

$FG=\sqrt{(x_G-x_F)^2+(y_G-y_F)^2}=\sqrt{(2-8)^2+(\cancel{-3}+\cancel{3\sqrt{3}}\cancel{+3}\cancel{-3\sqrt{3}})^2}=\sqrt{(-6)^2}=\sqrt{36}=6$

D'où : $EF = FG$, donc EFG est isocèle en F

3) Soit M : le centre du parallélogramme
Alors M milieu de [EG] et de [FH]

$x_M = \frac{x_E + x_G}{2} = \frac{11+2}{2} = \frac{13}{2}$ $\quad y_M = \frac{y_E + y_G}{2} = \frac{-3+(-3)+3\sqrt{3}}{2} = \frac{-6+3\sqrt{3}}{2}$

Soit $H(x_H ; y_H)$: $x_M = \frac{x_F + x_H}{2} = \frac{8+x_H}{2} = \frac{13}{2} \Leftrightarrow 8 + x_H = 13$

$\Leftrightarrow x_H = 13 - 8 = 5$

$y_M = \frac{y_F + y_H}{2} = \frac{-3+3\sqrt{3}+y_H}{2} = \frac{-6+3\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow -3 + y_H = -6$

$\Leftrightarrow y_H = -6+3 = -3$

Donc $H(5 ; -3)$

4) $EH = \sqrt{(x_H - x_E)^2 + (y_H - y_E)^2} = \sqrt{(5-11)^2 + (-3+3)^2} = \sqrt{36} = 6$

$FH = \sqrt{(x_H - x_F)^2 + (y_H - y_F)^2} = \sqrt{(5-8)^2 + (\cancel{-3}+\cancel{3}-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+27} = \sqrt{36} = 6$

$GH = \sqrt{(x_H - x_G)^2 + (y_H - y_G)^2} = \sqrt{(5-2)^2 + (\cancel{-3}+\cancel{3}-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+27} = \sqrt{36} = 6$

d'où H est le centre du cercle qui passe par E, F et G

H est bien le centre du cercle circonscrit au triangle EFG