

(Sujet A)

Exercice 1)

a) $\frac{1}{3}x - \frac{2}{5} < -1$

$\frac{1}{3}x < -1 + \frac{2}{5}$

$\frac{1}{3}x < -\frac{5}{5} + \frac{2}{5}$

$\frac{1}{3}x < -\frac{3}{5}$

$x < 3 \times \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{9}{5}$

Donc $S =]-\infty; -\frac{9}{5}[$

b) $x^2 - 4 - (2x+1)(2-x) = 0$

$(x+2)(x-2) - (2x+1) \times (-1) \times (x-2) = 0$

$(x-2) (x+2 - (2x+1) \times (-1)) = 0$

$(x-2) (x+2 + 2x+1) = 0$

$(x-2) (3x+3) = 0$

Si $A \times B = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$

$x-2 = 0$ ou $3x+3 = 0$

$x = 2$ ou $3x = -3$

$x = 2$ ou $x = -\frac{3}{3} = -1$

$S = \{2; -1\}$

c) $(2x-1)(5-x) \geq 0$

$2x-1 \geq 0$

$5-x \geq 0$

$2x \geq 1$

$5 \geq x$

$x \geq \frac{1}{2}$

Donc le tableau de signes suivant:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	5	$+\infty$
signe de $2x-1$	-	0	+	+
signe de $5-x$	+	+	0	-
signe de $(2x-1)(5-x)$	-	0	+	-

Donc:

$S = \left[\frac{1}{2}; 5\right]$

Exercice (2).

(2)

Partie A. $f(-1) = f(2) = f(3,5) = 0$

1) a) D'après le tableau, $f(0) = \boxed{-1}$

b) x est un éventuel antécédent de 0 par f , alors $f(x) = 0$.

Donc 0 a 3 antécédents par f :

$-1; 2; 3,5$

2) D'après le tableau, le maximum de f sur $[-4; 4]$ est 4 et il est atteint en $x = -3$

De même, -2 est le minimum de f sur $[-4; 4]$ et il est atteint en $x = 4$

3) Sur $[0; 4]$, le maximum de f est 2 (il est atteint en $x = 3$)
le minimum de f est -2 (il est atteint en $x = 4$)

D'ail, pour tout $x \in [0; 4]$, $-2 \leq f(x) \leq 2$

4) a) $\left. \begin{array}{l} 1,7 \in [0; 3] \\ 1,8 \in [0; 3] \end{array} \right\}$ or, sur $[0; 3]$, f est croissante

comme $1,7 < 1,8$, alors $f(1,7) < f(1,8)$

b) $-3,5 \in [-4; -3]$, d'ail $3 \leq f(-3,5) \leq 4$

$0,5 \in [0; 3]$, d'ail $-1 \leq f(0,5) \leq 2$

Or, $2 \leq 3$ d'ail $-1 \leq f(0,5) \leq 2 \leq 3 \leq f(-3,5) \leq 4$

C'est-à-dire:

$f(0,5) \leq f(-3,5)$

Partie B.

a) Par lecture graphique, $f(1) = -0,75$

b) Antécédents de 1 par f : $-1,5; 2,5$ et environ $3,3$

c) Résolution graphique de $f(x) = 2$

Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de f_p avec la droite horizontale à l'ordonnée 2.

On a: $S = \{-1,9; 3\}$

d) $f(x) > -1$:

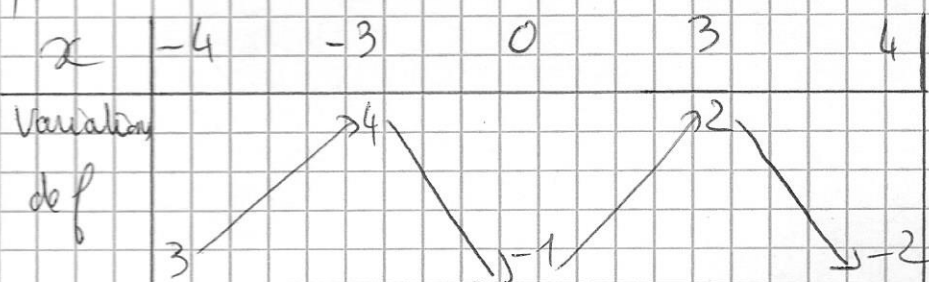
(3)

Les solutions sont les abscisses des points de la courbe C_f situés strictement au-dessus de la droite horizontale à l'ordonnée 1 d'ici :

$$S = [-4; -1,5[\cup]2,5; 3,3[$$

e) $f(x) \geq 0$ pour $x \in [-4; -1] \cup [2; 3,5]$ (Lorsque C_f est située au-dessus de l'axe des abscisses)
 $f(x) < 0$ pour $x \in]-1,2[\cup]3,5; 4]$ (Lorsque C_f est située strictement en dessous de l'axe des abscisses).

f) Tableau de variations :



On trouve le même tableau de variation que dans la partie A.

g) Pour tracer (Δ) d'équation $y = x + 1$, il suffit de calculer les coordonnées de 2 points distincts de (Δ) .

x	0	1
y	1	2

$A(0;1)$ et $B(1;2)$ sont deux points de (Δ) (voir figure sur le sujet).

R) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < x + 1$ consiste à chercher les abscisses des points de C_f situés strictement en-dessous de (Δ) .

D'ici : $S =]-1; 4]$

Exercice (3) :

1) $f(x) = (x-1)^2 + (x-1)(2x-1)$
 $= x^2 - 2x + 1 + 2x^2 - x - 2x + 1$
 $= 3x^2 - 5x + 2$ (Forme développée)

2) $f(x) = (x-1)^2 + (x-1)(2x-1)$
 $= (x-1)(x-1 + 2x-1) = (x-1)(3x-2)$ (Forme factorisée)

(4)

$$\begin{aligned}
 3) \quad 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{12} &= 3\left(x^2 - 2x \times \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2\right) - \frac{1}{12} \\
 &= 3\left(x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{25}{36}\right) - \frac{1}{12} \\
 &= 3x^2 - 5x + \frac{25}{12} - \frac{1}{12} \\
 &= 3x^2 - 5x + \frac{24}{12} \\
 &= 3x^2 - 5x + 2 = f(x)
 \end{aligned}$$

Donc: $\underline{f(x) = 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{12}}$

$$\begin{aligned}
 4) \text{ a) } f\left(\frac{5}{6}\right) &= 3\left(\underbrace{\frac{5}{6} - \frac{5}{6}}_{=0}\right)^2 - \frac{1}{12} \\
 &= \boxed{-\frac{1}{12}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } f(x) = 2 &: \begin{cases} 3x^2 - 5x + 2 = 2 \\ 3x^2 - 5x = 0 \\ x(3x - 5) = 0 \end{cases} \\
 \text{Si } A \times B = 0, &\text{ alors } A = 0 \text{ ou } B = 0 \\
 x = 0 &\text{ ou } 3x - 5 = 0 \\
 x = 0 &\text{ ou } x = \frac{5}{3}
 \end{aligned}$$

$\left. \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\} S = \left\{0; \frac{5}{3}\right\}$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } x \text{ antécédent de } 0 \text{ par } f: & f(x) = 0 \\
 \text{d'où: } (x-1)(3x-2) &= 0 \\
 \text{Si } A \times B = 0, &\text{ alors } A = 0 \text{ ou } B = 0 \\
 x-1 = 0 &\quad \text{ou } 3x-2 = 0 \\
 x = 1 &\quad \text{ou } 3x = 2 \\
 x = 1 &\quad \text{ou } x = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

$\left. \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\} 0 \text{ a deux antécédents par } f: \left[1; \frac{2}{3}\right]$

d) $f(x) = (x-1)(3x-2)$.

$$x-1 \geq 0$$

$$x \geq 1$$

$$3x-2 \geq 0$$

$$3x \geq 2$$

$$x \geq \frac{2}{3}$$

Solution de $f(x) \leq 0$:

$$S = \left] \frac{2}{3} ; 1 \right[$$

On a le tableau de signes suivant:

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	1	$+\infty$
signe de $x-1$	-	-	0	+
signe de $3x-2$	-	0	+	+
signe de $f(x)$	+	0	-	+

Exercice (4):

1) $a=0$: on est dans le cas $a \leq 2$

alors: $b = 0+2 = 2$

$$c = 2^2 = 4$$

$$d = (0+3)^2 = 3^2 = 9$$

$$e = 4 - 9 = \boxed{-5} \text{ valeur affichée par l'algorithme}$$

$a=2$: on est dans le cas $a \leq 2$

$$b = 2+2 = 4$$

$$c = 4^2 = 16$$

$$d = (2+3)^2 = 5^2 = 25$$

$$e = 16 - 25 = \boxed{-9} \text{ valeur affichée par l'algorithme}$$

$a=4$: on est dans le cas $a > 2$ (instructions après le sinon)

$$b = \frac{1}{2} \times 4 - 2 = \boxed{0} \text{ valeur affichée par l'algorithme}$$

2) a) si $a \leq 2$: $b = a+2$

$$c = b^2 = (a+2)^2$$

$$d = (a+3)^2$$

$$e = (a+2)^2 - (a+3)^2$$

On a $f(x) = (x+2)^2 - (x+3)^2$

$$\begin{aligned} b) \quad f(x) &= (x+2)^2 - (x+3)^2 \\ &= x^2 + 4x + 4 - (x^2 + 6x + 9) \\ &= 4x + 4 - 6x - 9 \\ &= \underline{\underline{-2x - 5}} \end{aligned}$$

f est une fonction affine car de la forme $f(x) = ax + b$
Comme $a = -2 < 0$, alors f est strictement décroissante

Exercice (5):

Partie (A):

a) $T(8) = 5$ et $T(14) = 15$ (d'après l'énoncé).

b) On sait que $T(h) = ah + b$. (T fonction affine).

calcul de a:

$$a = \frac{T(8) - T(14)}{8 - 14} = \frac{5 - 15}{8 - 14} = \frac{-10}{-6} = \frac{5}{3}$$

calcul de b:

$$T(h) = \frac{5}{3} h + b$$

Or, $T(8) = 5$, d'où $\frac{5}{3} \times 8 + b = 5$

$$\frac{40}{3} + b = 5, \quad b = 5 - \frac{40}{3} = \frac{15}{3} - \frac{40}{3} = \underline{\underline{-\frac{25}{3}}}$$

Donc: $T(h) = \frac{5}{3} h - \frac{25}{3}$

c) $T(10) = \frac{5}{3} \times 10 - \frac{25}{3} = \frac{50}{3} - \frac{25}{3} = \frac{25}{3} (\approx \underline{\underline{8,3}}^\circ\text{C})$

$$T(12) = \frac{5}{3} \times 12 - \frac{25}{3} = \frac{35}{3} (\approx \underline{\underline{11,7}}^\circ\text{C})$$

Partie (B):

D_3 est horizontale, d'où h est une fonction constante.

Par lecture graphique:

$$\boxed{h(x) = -2}$$

Pour (D₁):

$$f(x) = ax + b$$

Détermination de a: $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{1} = 3$

Détermination de b = ordonnée à l'origine = 1.

Donc: $f(x) = 3x + 1$

Pour (D₂): $g(x) = ax + b$

Détermination de a: $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4}{2} = -2$

Détermination de b: ordonnée à l'origine = 3

Donc:

$g(x) = -2x + 3$

Exercice (6):

1)

Temps d'attente en min	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Effectifs	5	9	13	8	10	14	13	11	7	8	3	1
ECC	5	14	27	35	45	59	72	83	90	98	101	102

2) Caractère: Temps d'attente aux caisses. Il est quantitatif.

3) Le mode est la valeur du caractère qui a le plus grand effectif.

Donc $\text{le mode} = 6$

Etendue = $x_{\max} - x_{\min} = 12 - 1 = 11$.

4) L'effectif total = 102 (= il est pair).

La médiane est alors la moyenne entre la 51^{ème} et la 52^{ème} note.

D'après les ECC du tableau:

on trouve que la médiane est alors 6 min

5) - Position de Q_1 : $\frac{102}{4} = \frac{51}{2} = 25,5$, c'est donc la 26^{ème} valeur

- Donc $Q_1 = 3 \text{ min}$

- Position de Q_3 : $\frac{3}{4} \times 102 = 76,5$, c'est donc la 77^{ème} valeur

$$\boxed{Q_3 = 8 \text{ min}}$$

6) D'après le tableau: 4 clients attendent plus de 10 minutes
soit $\frac{4}{102} \times 100 \approx 3,9$.

Donc 3,9% attendent plus de 10 minutes en caisse

Donc il n'ouvrira pas de caisse supplémentaire

Calcul du temps moyen d'attente:

$$\bar{t} = \frac{5 \times 1 + 9 \times 2 + 13 \times 3 + \dots + 10 \times 8 + 11 \times 3 + 12 \times 1}{102}$$

$$\approx \frac{595}{102} \approx 5,8 \text{ min} > 5 \text{ min}$$

Donc: Le directeur ouvrira une nouvelle caisse.