

Exercice 1: 7

$$1) \underline{(1-x)(x+5)} = x+5 - x^2 - 5x$$

$$= -x^2 - 4x + 5 = \underline{f(x)}$$

(1)

$$2) \underline{9 - (x+2)^2} = 9 - (x^2 + 4x + 4)$$

$$= -x^2 - 4x - 4 + 9$$

$$= -x^2 - 4x + 5 = \underline{f(x)}$$

(1)

Cette écriture est la forme canonique de f

(0,5)

$$3) a) x \text{ antécédent de } 0 \text{ par } f \Leftrightarrow f(x) = 0$$

On va utiliser la forme factorisée:

(1)

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (1-x)(x+5) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1-x = 0 \text{ ou } x+5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -5$$

Donc: 0 a deux antécédents par f : 1 et -5.

b) On va utiliser la forme canonique:

$$f(x) = 9 \Leftrightarrow 9 - (x+2)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow -(x+2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x+2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2$$

(1)

Donc $S = \{-2\}$

c) On va utiliser la forme développée et réduite:

$$\underline{f(0)} = -0^2 - 4 \times 0 + 5 = \underline{5}$$

(0,5)

$$d) \text{ Forme canonique de } f: f(x) = -(x+2)^2 + 9$$

$$= a(x-\alpha)^2 + \beta$$

où $(\alpha; \beta)$ sont les coordonnées de S (sommet de la parabole représentant f)

Par identification: $\begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 9 \end{cases}$

①

②

Donc: $S(-2; 9)$

e) D'après la question précédente, à partir de la forme canonique de f
 $\begin{cases} a = -1 < 0 \\ \alpha = -2 \\ \beta = 9 \end{cases}$ d'où f est d'abord croissante, puis décroissante.

D'où le tableau de variations de f :

①

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
Variations de f		$\nearrow 9$	$\searrow$

Exercice ②: ~~③~~

$$\begin{aligned} R(x) &= (x+3)(x-2) \\ &= x^2 - 2x + 3x - 6 \\ &= x^2 + x - 6, \quad a = 1 > 0 \end{aligned}$$

Des 4 fonctions, c'est la seule qui a une $a > 0$

Or, une seule parabole est orientée vers le haut

Donc: (P_1) représente R .

①

$$\text{On a } f(0) = -\frac{1}{2} \cdot 0^2 + 3 = 3$$

Donc la parabole représentant f passe par le point de coordonnées $(0; 3)$. Or, la seule parabole passant par ce point est la parabole (P_3)

Elle est bien orientée vers le bas ($a = -\frac{1}{2} < 0$)

Enfin, elle passe par les points de coordonnées $(-3; 0)$ et $(2; 0)$

$$\text{et } f(-3) = -\frac{1}{2}(9) + \frac{3}{2} + 3 = 0 \text{ et } f(2) = 0$$

Donc: (P_3) représente f

②

$$\hat{x}(x) = -(x-2)^2 \quad : \text{forme canonique.}$$

$$\text{or, } \hat{x}(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

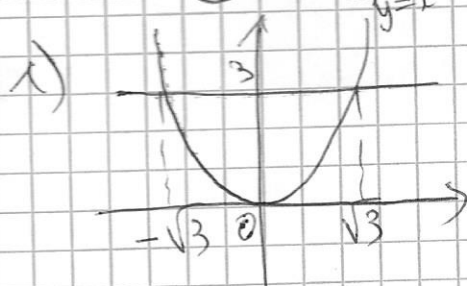
Par identification: $\begin{cases} a = -1 < 0 \text{ (parabole ouverte vers le bas)} \\ \alpha = 2 \\ \beta = 0 \end{cases}$ (coordonnées du sommet S de la parabole.

ce qui correspond à la parabole P_2 ($\alpha; \beta$) = (2; 0)

Donc: (P_2) représente i ①

g est le seul trinôme non représenté graphiquement.

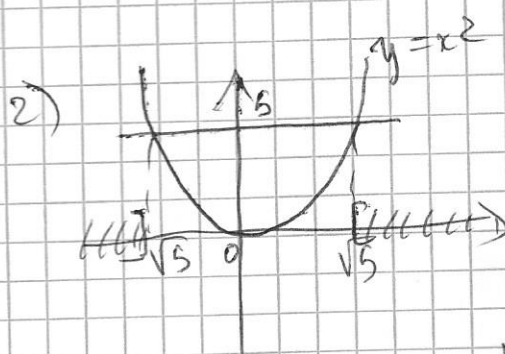
Exercice ③: $y = x^2$



$x^2 = 3$ admet 2 solutions

(car la droite d'équation $y = 3$ et la courbe de $x \mapsto x^2$ ont 2 points d'intersection)

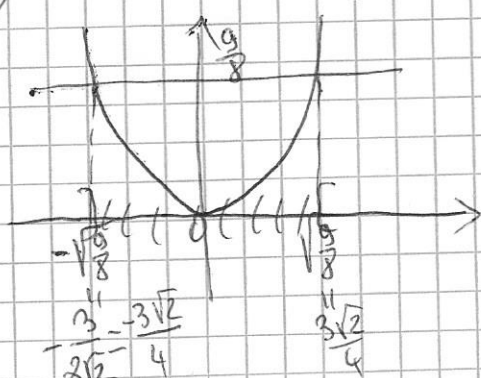
① $S = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$ (ce sont les abscisses des 2 pts d'intersection)



$x^2 \geq 5$: on cherche les abscisses des pts de la courbe de $x \mapsto x^2$ situés au-dessus de la droite horizontale d'équation $y = 5$.

① $S =]-\infty; -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}; +\infty[$

3) $8x^2 < 9 \Leftrightarrow x^2 < \frac{9}{8}$



$x^2 < \frac{9}{8}$: on cherche les abscisses des points de la courbe de $x \mapsto x^2$ situés en dessous de la droite horizontale d'équation $y = \frac{9}{8}$.

① $S = \left] -\frac{3\sqrt{2}}{4}; \frac{3\sqrt{2}}{4} \right[$

Exercice (4): 3

4

1) $2,4 \leq x \leq 3,7$

Sur $[0; +\infty[$, $x \mapsto x^2$ est strictement croissante

et $2,4 \in [0; +\infty[$

$3,7 \in [0; +\infty[$

d'où $2,4^2 \leq x^2 \leq 3,7^2$

(1)

Donc:

$5,76 \leq x^2 \leq 13,69$

2) $-8,1 \leq x \leq -7,9$

Sur $] -\infty; 0]$, $x \mapsto x^2$ est strictement décroissante

et $-8,1 \in] -\infty; 0]$

$-7,9 \in] -\infty; 0]$

(1)

d'où:

$(-7,9)^2 \leq x^2 \leq (-8,1)^2$

Donc:

$62,41 \leq x^2 \leq 65,61$

3) $-9 \leq x \leq 4,2$

$-9 \in] -\infty; 0]$ et $4,2 \in [0; +\infty[$:

$(-9)^2 = 81$

$4,2^2 = 17,64$

d'où: $0 \leq x^2 \leq 81$

(1)

(= le plus grand des 2 carrés)

Exercice (5): 4

1) Comme ABCD est un carré de côté 1, alors

$x \in [0; 1]$

(0,5)

2) EAF est un triangle isocèle rectangle en A

avec $EA = AF = x$

d'où $Aire(EAF) = \frac{EA \times AF}{2} = \frac{x \times x}{2} = \frac{x^2}{2}$

(0,5)

BEC: triangle rectangle en B avec $BE = 1 - x$ et $BC = 1$

d'où $Aire(BEC) = \frac{BE \times BC}{2} = \frac{(1-x) \times 1}{2} = \frac{1-x}{2}$

(0,5)

D'après l'énoncé:

$Aire(FDC) = Aire(BEC) = \frac{1-x}{2}$

(0,5)

3) $f(x) = Aire(EFC) = Aire(ABCD) - (Aire(EAF) + Aire(BEC) + Aire(FDC))$
 $= 1 - \left(\frac{x^2}{2} + 1 - x \right)$

(0,5)

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - 1 + x$$

(5)

Donc $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x$

$$\begin{aligned} 4) -\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2} &= -\frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1) + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + x = f(x) \text{ (question 3)} \end{aligned}$$

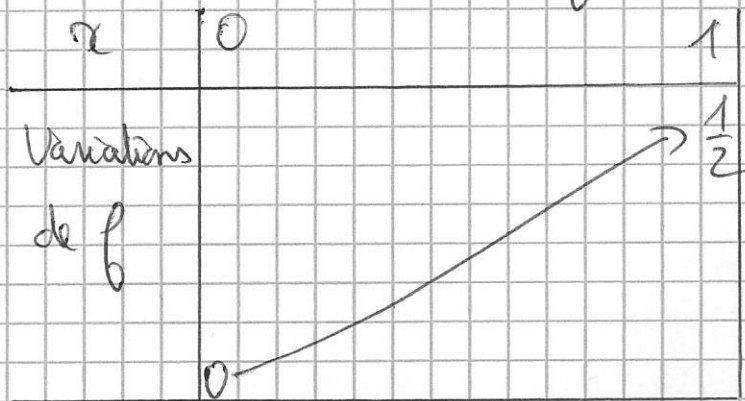
Donc: $f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}$ (Forme canonique de f)

(0,5)

5) Forme canonique de f : $a(x-\alpha)^2 + \beta$

Par identification: $\begin{cases} a = -\frac{1}{2} < 0 \text{ d'où } f \text{ est croissante puis décroissante.} \\ \alpha = 1 \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases}$

D'où le tableau de variation de f sur $[0; 1]$.



(1)

L'aire maximale de EFC est $\frac{1}{2}$ atteint en $x = 1$.