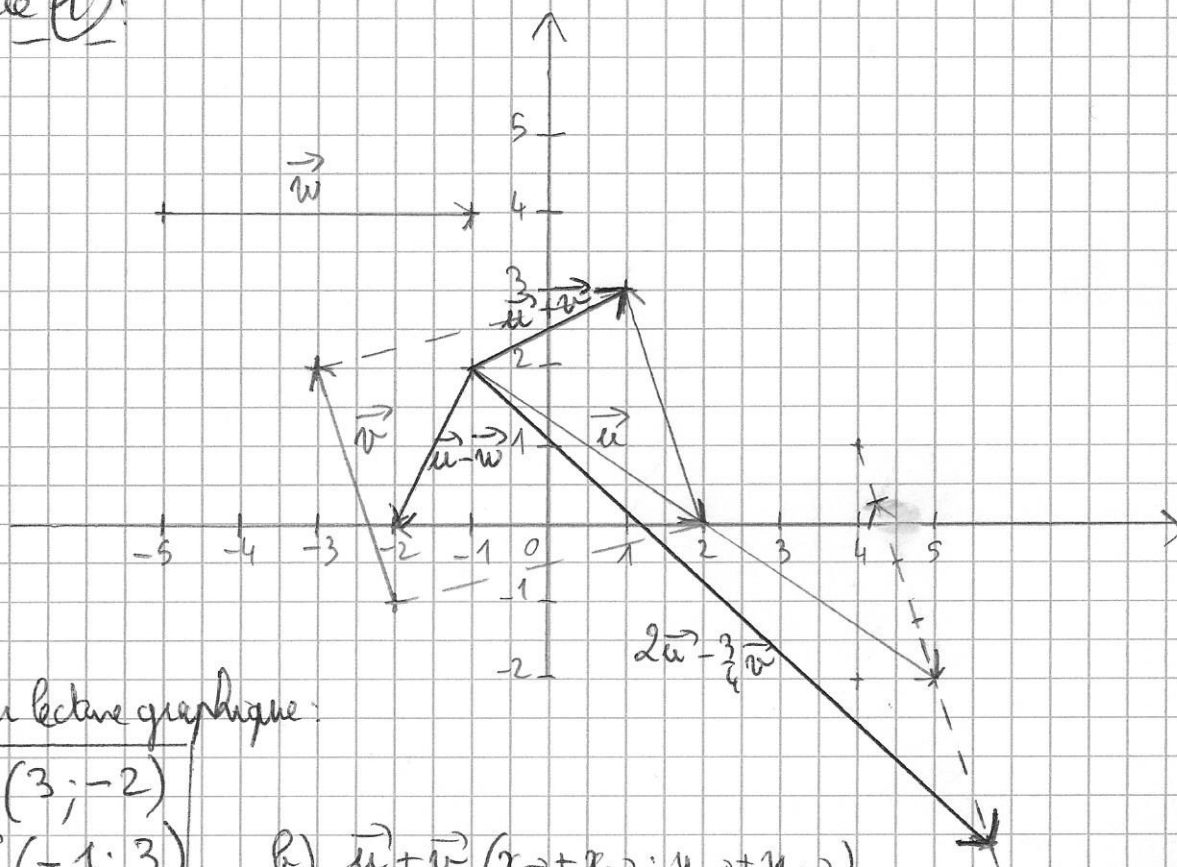


Exercice (1):

1) a)
b)
c)



2) a) Par lecture graphique:

$$\begin{aligned} \vec{u} & (3; -2) \\ \vec{v} & (-1; 3) \\ \vec{w} & (4; 0) \end{aligned}$$

b) $\vec{u} + \vec{v} (x_{\vec{u}} + x_{\vec{v}}; y_{\vec{u}} + y_{\vec{v}})$
 $(3 + (-1); -2 + 3)$

Donc $\vec{u} + \vec{v} (2; 1)$

$\vec{u} - \vec{w} (x_{\vec{u}} - x_{\vec{w}}; y_{\vec{u}} - y_{\vec{w}})$
 $(3 - 4; -2 - 0)$

Donc $\vec{u} - \vec{w} (-1; -2)$

$2\vec{u} - \frac{3}{4}\vec{v} (2x_{\vec{u}} - \frac{3}{4}x_{\vec{v}}; 2y_{\vec{u}} - \frac{3}{4}y_{\vec{v}})$
 $(2 \times 3 - \frac{3}{4} \times (-1); -4 - \frac{3}{4} \times 3)$
 $(6 + \frac{3}{4}; -4 - \frac{9}{4})$

Donc: $2\vec{u} - \frac{3}{4}\vec{v} (\frac{27}{4}; -\frac{25}{4})$

Exercice (2): A(-1; 3) B(1; 1) C(2; 2) D(3; 4)

1) a) $\vec{AE} = 3\vec{AB}$ On pose $E(x_E; y_E)$, $F(x_F; y_F)$
 $G(x_G; y_G)$

$\vec{AE} (x_E - x_A; y_E - y_A)$
 $(x_E + 1; y_E - 3)$

$\vec{AB} (x_B - x_A; y_B - y_A)$
 $(1 - (-1); 1 - 3)$
 $(2; -2)$

Comme $\vec{AE} = 3\vec{AB}$, alors $\begin{cases} x_E + 1 = 6 \\ y_E - 3 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = 5 \\ y_E = -3 \end{cases}$ Donc $E(5; -3)$

b) (milieu de $[AF]$)

(2)

$$\Rightarrow \begin{cases} x_c = \frac{x_A + x_F}{2} \\ y_c = \frac{y_A + y_F}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 = \frac{-1 + x_F}{2} \\ 2 = \frac{3 + y_F}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 + x_F = 4 \\ 4 = 3 + y_F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_F = 5 \\ y_F = 1 \end{cases}$$

Donc $F(5; 1)$

$$\vec{GA} = \frac{3}{2} \vec{DA}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_A - x_G = \frac{3}{2} (x_A - x_D) \\ y_A - y_G = \frac{3}{2} (y_A - y_D) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 - x_G = \frac{3}{2} (-1 - 3) \\ 3 - y_G = \frac{3}{2} (3 - 4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_G = -1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{2} = 5 \\ y_G = 3 - \frac{3}{2} + 6 = \frac{18}{2} - \frac{3}{2} = \frac{15}{2} \end{cases}$$

Donc $G(5; \frac{15}{2})$

2) on a $\vec{EF}(x_F - x_E; y_F - y_E)$
 $(5 - 3; 1 + 3)$
 $(2; 4)$

$\vec{EG}(x_G - x_E; y_G - y_E)$
 $(5 - 3; \frac{15}{2} + 3)$
 $(2; \frac{21}{2})$

on a: $y_{\vec{EF}} \times \frac{15}{8} = 4 \times \frac{15}{8} = \frac{15}{2} = y_{\vec{EG}}$

et $x_{\vec{EF}} \times \frac{15}{8} = 2 \times \frac{15}{8} = \frac{15}{4} = x_{\vec{EG}}$

d'où: $\vec{EG} = \frac{15}{8} \vec{EF}$

Donc $\vec{EF}$ et $\vec{EG}$ sont colinéaires avec un point en commun

Donc E, F et G sont alignés

Exercice (3):

$A(-3; 2) \quad B(-1; 4) \quad C(\sqrt{3} - 2; 3 - \sqrt{3}), D(3\sqrt{3} - 2; 3 - 3\sqrt{3})$

1) Voir figure

2) $\vec{AE} = \vec{AB} + \vec{AD}$ - Posons $E(x_E; y_E)$

$$\vec{AB} (x_B - x_A; y_B - y_A)$$
$$(-1 + 3; 4 - 2)$$

$$\vec{AB} (2; 2)$$

$$\vec{AD} (x_D - x_A; y_D - y_A)$$

$$(3\sqrt{3} - 2 + 3; 3 - 3\sqrt{3} - 2)$$

$$\vec{AD} (1 + 3\sqrt{3}; 1 - 3\sqrt{3})$$

$$\text{d'où } \vec{AE} (2 + 1 + 3\sqrt{3}; 2 + 1 - 3\sqrt{3})$$

$$(3 + 3\sqrt{3}; 3 - 3\sqrt{3})$$

$$\text{Or, } \vec{AE} (x_E - x_A; y_E - y_A)$$
$$(x_E + 3; y_E - 2)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{d'où } x_E + 3 &= 3 + 3\sqrt{3} \\ y_E - 2 &= 3 - 3\sqrt{3} \end{aligned} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_E = 3\sqrt{3} \\ y_E = 5 - 3\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{Donc } \underline{E(3\sqrt{3}; 5 - 3\sqrt{3})}$$

$$3) \vec{AE} = \vec{AB} + \vec{AD}$$

$$\Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{DE} = \vec{AB} + \vec{AD} \text{ (relation de Chasles)}$$

$$\Leftrightarrow \vec{DE} = \vec{AD} \Leftrightarrow \underline{ABED \text{ est un parallélogramme}}$$

$$4) \vec{AC} (x_C - x_A; y_C - y_A)$$
$$(\sqrt{3} - 2 + 3; 3 - \sqrt{3} - 2)$$
$$(1 + \sqrt{3}; 1 - \sqrt{3})$$

$$\vec{AE} (x_E - x_A; y_E - y_A)$$
$$(3\sqrt{3} + 3; 5 - 3\sqrt{3} - 2)$$
$$(3 + 3\sqrt{3}; 3 - 3\sqrt{3})$$

$$\text{d'où } \vec{AE} = 3\vec{AC}$$

$$\Leftrightarrow \vec{AE} \text{ et } \vec{AC} \text{ sont colinéaires avec un point commun}$$
$$\text{donc } \underline{A, C \text{ et } E \text{ sont alignés}}$$

$$5) AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$
$$= (-1 + 3)^2 + (4 - 2)^2$$
$$= 4 + 4$$
$$= 8$$

$$AC^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2$$
$$= (\sqrt{3} - 2 + 3)^2 + (3 - \sqrt{3} - 2)^2$$
$$= (1 + \sqrt{3})^2 + (1 - \sqrt{3})^2$$
$$= 1 + 2\sqrt{3} + 3 + 1 - 2\sqrt{3} + 3$$
$$= 2 + 6 = 8$$

$$BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = (\sqrt{3} - 2 + 1)^2 + (3 - \sqrt{3} - 4)^2$$
$$= (\sqrt{3} - 1)^2 + (-1 - \sqrt{3})^2$$

$$d'au \ BC^2 = 3 - 2\sqrt{3} + 1 + 1 + 2\sqrt{3} + 3$$

$$= 8$$

(4)

Donc $AB = BC = AC = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

c'est-à-dire ABC est un triangle équilatéral

6) F milieu de [BE]

$$x_F = \frac{x_B + x_E}{2} = \frac{-1 + 3\sqrt{3}}{2}$$

$$y_F = \frac{y_B + y_E}{2} = \frac{4 + 5 - 3\sqrt{3}}{2} = \frac{9 - 3\sqrt{3}}{2}$$

Donc $F\left(\frac{3\sqrt{3}-1}{2}; \frac{9-3\sqrt{3}}{2}\right)$

7) $\overrightarrow{BC} (x_c - x_B; y_c - y_B)$
 $(\sqrt{3} - 2 + 1; 3 - \sqrt{3} - 4)$
 $(\sqrt{3} - 1; -1 - \sqrt{3})$

$\overrightarrow{FD} (x_D - x_F; y_D - y_F)$
 $(3\sqrt{3} - 2 - \frac{3\sqrt{3}-1}{2}; 3 - 3\sqrt{3} - \frac{9-3\sqrt{3}}{2})$
 $(\frac{6\sqrt{3}-4-3\sqrt{3}+1}{2}; \frac{6-6\sqrt{3}-9+3\sqrt{3}}{2})$
 $(\frac{-3+3\sqrt{3}}{2}; \frac{-3-3\sqrt{3}}{2})$

On a: $\frac{3}{2} \times (\sqrt{3} - 1) = \frac{3\sqrt{3} - 3}{2} = \frac{-3+3\sqrt{3}}{2}$

$\frac{3}{2} \times (-1 - \sqrt{3}) = \frac{-3 - 3\sqrt{3}}{2}$

donc $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{FD}$ sont colinéaires

c'est-à-dire $(BC) \parallel (FD)$

Exercice (4):

$\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

1)



2) $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{AD}$ (relation de Chasles)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{AD}$ (car ABCD parallélogramme)

$\Leftrightarrow \underline{\underline{\overrightarrow{CM} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}}}$

$$3) \quad \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \quad (\text{car } ABCD \text{ parallélogramme})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$$

$$4) \quad \underline{-2\overrightarrow{CN}} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} = \underline{\overrightarrow{CM}}$$

Donc : $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CN}$ sont colinéaires avec un point commun

c'est-à-dire : C, M et N sont alignés