

Exercice (2):

1) Longueur du 3^{ème} côté: $100 - 2x$

2) La zone en question est rectangulaire:

$A(x) = x \times (100 - 2x) = -2x^2 + 100x$

3) $A(x) \geq 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 100x \geq 0$
 $\Leftrightarrow 2x(-x + 50) \geq 0$

Remarque: la longueur du 3^{ème} côté $\geq 0 \Leftrightarrow 100 - 2x \geq 0$
 $\Leftrightarrow x \leq \frac{100}{2} = 50$

Or, x est une longueur, d'où $x \geq 0$

D'où $0 \leq x \leq 50$

Sur cet intervalle, $2x \geq 0$ et $-x + 50 \geq 0$

Nonc: $A(x) \geq 0$

Par conséquent:

$S = [0; 50]$

4)

x	0	10	20	30	40	50
$A(x)$	0	800	1200	1200	800	0

D'après ce tableau, pour $x \in [20; 30]$, l'aire $A(x)$ est maximale.

5) a) $A(x) = -2x^2 + 100x$
 $= -2(x^2 - 50x)$
 $= -2[(x - 25)^2 - 25^2]$
 $= -2(x - 25)^2 + 2 \times 25^2 = -2(x - 25)^2 + 1250$

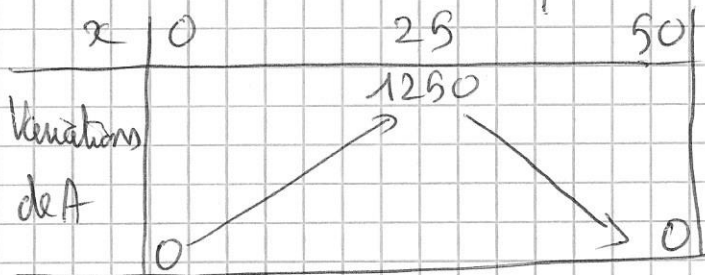
(Il s'agit de la forme canonique de A .)

5) On sait que la forme canonique de A est donnée par: (2)

$$A(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

Donc par identification:
$$\begin{cases} a = -2 & (\text{on le savait déjà}) \\ \alpha = 25 \\ \beta = 1250 \end{cases}$$

Comme $a < 0$, A est d'abord croissante, puis décroissante.
Le maximum de A est β et il est atteint en $x = 25$.



c) Voir la courbe.

d) L'aire est maximale pour $x = 25$ m et cette aire vaut 1250 m^2 .
Les dimensions de l'enclos sont alors de 25×50 m.

6) a) Par lecture graphique: on cherche les éventuels antécédents de 450 par A .

$$b) A(x) = 450 \Leftrightarrow -2(x-25)^2 + 1250 = 450$$

$$\Leftrightarrow -2(x-25)^2 = -800$$

$$\Leftrightarrow (x-25)^2 = 400$$

$$\Leftrightarrow (x-25)^2 - 20^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-25+20)(x-25-20) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)(x-45) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-5=0 \text{ ou } x-45=0$$

$$\Leftrightarrow x=5 \text{ ou } x=45.$$

L'enclos peut mesurer: 5×90 m ou $45 \text{ m} \times 10 \text{ m}$

Exercice (3):

Partie (A):

1)
$$\begin{cases} 2x - y = -3 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

Par substitution:
$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ x + 2(2x + 3) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 3 \\ 5x + 6 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 3 \\ 5x = -5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2(-1) + 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 + 3 = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Donc:
$$S = \{(-1; 1)\}$$

2) (AB): $y = 2x + 3$ (AC): $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

a) A est le point d'intersection de ces deux droites
Si on note $(x; y)$ ses coordonnées, alors $(x; y)$ vérifie le système:

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = -3 \\ 2y = -x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = -3 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \text{ (c'est le système de la question 1)}$$

Or, on a vu que ce système admettait pour unique solution $(-1; 1)$

Donc $A(-1; 1)$

b) $B \in (AB)$ d'où $y_B = 2x_B + 3$ et $x_B = -1$ } $B(1; 5)$
donc $y_B = 2 \times 1 + 3 = 5$

c) $C \in (AC)$ d'où $y_C = -\frac{1}{2}x_C + \frac{1}{2}$ avec $y_C = -1$ }
d'où $-1 = -\frac{1}{2}x_C + \frac{1}{2}$
$$\Leftrightarrow -1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}x_C \Leftrightarrow -\frac{3}{2} = -\frac{1}{2}x_C$$

$$\Leftrightarrow x_C = 3$$
 } $C(3; -1)$

Partie (B): $A(-1; 1)$ $B(1; 5)$ $C(3; -1)$

1) On repère

2) E milieu de $\{BC\}$:

$$\left. \begin{aligned} x_E &= \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1+3}{2} = 2 \\ y_E &= \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{5+(-1)}{2} = 2 \end{aligned} \right\} E(2;2)$$

F milieu de $\{AC\}$: (4)

$$\left. \begin{aligned} x_F &= \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1 \\ y_F &= \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{1+(-1)}{2} = 0 \end{aligned} \right\} \text{donc } F(1;0)$$

3) D symétrique de A par rapport à E $\Leftrightarrow$ E milieu de $\{AD\}$

$$\text{D'où : } x_E = \frac{x_A + x_D}{2} \quad \text{et } y_E = \frac{y_A + y_D}{2}$$

$$2 = \frac{-1 + x_D}{2} \quad \text{et } 2 = \frac{1 + y_D}{2}$$

Donc :

$$-1 + x_D = 4$$

$$1 + y_D = 4$$

$$x_D = 4 + 1 = 5$$

$$y_D = 4 - 1 = 3$$

$$\text{Donc } D(5;3)$$

4) $A(-1;1)$ $E(2;2)$ $x_A \neq x_E$ et $y_A \neq y_E$
d'où (AE) est une droite oblique.

$$(AE) : y = ax + b$$

$$\text{avec } a = \frac{y_E - y_A}{x_E - x_A} = \frac{2 - 1}{2 - (-1)} = \frac{1}{3}$$

$$(AE) : y = \frac{1}{3}x + b \quad \text{Or, } A(-1;1) \in (AE)$$

$$\text{d'où } y_A = \frac{1}{3}x_A + b$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{1}{3} \times (-1) + b$$

$$\Leftrightarrow b = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Donc } (AE) : y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

5a) $B(1;5)$ $F(1;0)$ $x_B = x_F$, donc (BF) est une droite verticale d'équation $x = 1$

D'où (AE) et (BF) sont sécantes. Notons G leur point d'intersection.

b) E milieu de $\{BC\}$, d'où (AE) médiane issue de A du triangle ABC . D'autre part, F milieu de $\{AC\}$, d'où (BF) médiane issue de B du triangle ABC .

Or, dans un triangle, les médianes sont concourantes et le point de concours est le centre de gravité du triangle.

Donc : G est le centre de gravité du triangle ABC.

(5)

6) a) $(0, 1, 5)$ est un repère orthonormal du plan.

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(1 - (-1))^2 + (5 - 1)^2} \\ &= \sqrt{4 + 16} \\ &= \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

b) on admet que $AC = 2\sqrt{5}$ et $BC = 2\sqrt{10}$

Tout d'abord, $AB = AC$ d'où ABC est isocèle en A

D'autre part: $BC^2 = (2\sqrt{10})^2 = 4 \times 10 = 40$

$$\begin{aligned} \text{et } AB^2 + AC^2 &= (2\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2 = 4 \times 5 + 4 \times 5 \\ &= 40 \end{aligned}$$

$$\text{D'où: } BC^2 = AB^2 + AC^2$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A

Donc: ABC est un triangle rectangle et isocèle en A

c) E est le milieu de $\{BC\}$ et de $\{AD\}$

Le quadrilatère $ABDC$ a ses diagonales qui se coupent en leur milieu

Donc $ABDC$ est un parallélogramme.

Or, le triangle ABC est rectangle et isocèle en A (d'après 6b))

D'où: $ABDC$ est un parallélogramme qui possède un angle droit et deux côtés consécutifs égaux

Par conséquent:

$ABDC$ est un carré