NOM : .... Prénom : CORRIGE

Seconde 2	**Devoir de mathématiques** *Second degré*	Fait le 09/02/15

– Calculatrice autorisée

– Durée : 1h30

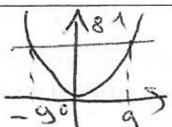
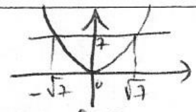
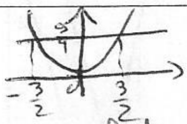
Total /25 → /20

Observations :

Note :

Exercice 1 : /5

1) On considère les équations et inéquations suivantes. Les résoudre en utilisant à chaque fois la représentation graphique de la fonction carré :

Équation ou inéquation	a) $x^2 = 81$	b) $x^2 > 7$	c) $4x^2 \leq 9$ $\Leftrightarrow x^2 \leq \frac{9}{4}$
Représentations graphiques, justifications et solutions 1	 Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de la parabole avec la droite horizontale à l'ordonnée 81 $S = \{-9 ; 9\}$	 Les solutions sont les abscisses des points de la courbe situés strictement au-dessus de la droite horizontale à l'ordonnée 7 $S =]-\infty ; -\sqrt{7}[\cup]\sqrt{7} ; +\infty[$ 1,5	 Les solutions sont les abscisses des points de la parabole situés en-dessous de la droite horizontale à l'ordonnée $\frac{9}{4}$ Donc $S = [-\frac{3}{2} ; \frac{3}{2}]$ 1,5

2) Résoudre l'équation a) algébriquement :

1

$x^2 = 81$

$x^2 - 81 = 0$

$(x-9)(x+9) = 0$

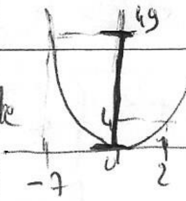
Si $A \times B = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$

D'où $x - 9 = 0$ ou $x + 9 = 0$

Donc $S = \{9 ; -9\}$

Exercice 2 : /3

Déterminer en justifiant l'encadrement le plus fin de x^2 dans les cas suivants :

a) $3 \leq x < 8$	b) $-5 < x < -1$		c) $-7 < x \leq 2$
Sur $[0 ; +\infty[$, $x \mapsto x^2$ est strictement croissante d'où : $3 \leq x < 8$ entraîne que : $\boxed{9 \leq x^2 < 64}$	Sur $]-\infty ; 0]$, $x \mapsto x^2$ est strictement décroissante d'où $-5 < x < -1$ entraîne que : $\boxed{1 < x^2 < 25}$		Lorsque $-7 < x \leq 2$, alors $0 \leq x^2 < 49$ (en utilisant un schéma de la courbe représentative de la fonction carré).

Exercice 3 : 1/2

Soient les nombres suivants : $A = 1 - \sqrt{5}$ et $B = 1 - \sqrt{3}$

Comparer A^2 et B^2 sans calcul en justifiant soigneusement :

$1-\sqrt{5} < 0$ et $1-\sqrt{3} < 0$ avec $1-\sqrt{5} < 1-\sqrt{3}$

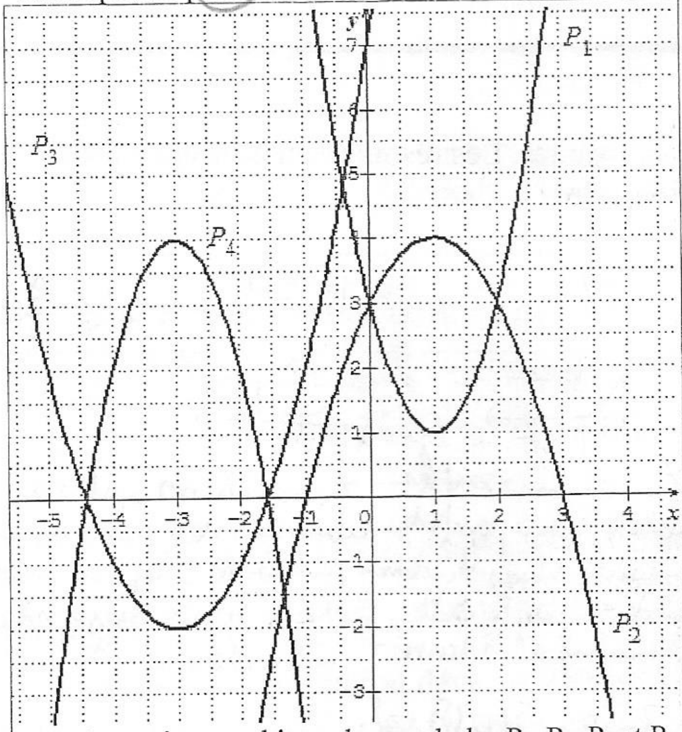
Or, sur $]-\infty ; 0]$, $x \longmapsto x^2$ est strictement décroissante

D'où $(1-\sqrt{5})^2 > (1-\sqrt{3})^2$

c'est-à-dire $A^2 > B^2$

Exercice 4 : 10

Voici quatre paraboles et trois fonctions trinômes du second degré :



Représentation graphique des paraboles P_1, P_2, P_3 et P_4

Expressions des trinômes en fonction de x :

$f(x) = x^2 + 6x + 7$

$g(x) = -2(x + 3)^2 + 4$

$h(x) = 2x^2 - 4x + 3$

1) Montrer que $g(x) = -2x^2 - 12x - 14$

$-2(x+3)^2 + 4 = -2(x^2 + 6x + 9) + 4$

$= -2x^2 - 12x - 18 + 4$

$= -2x^2 - 12x - 14$

Donc : $g(x) = -2x^2 - 12x - 14$ 0,5

2) Attribuer à f , g et h les paraboles correspondantes **en justifiant soigneusement :**

f	$f(x) = x^2 + 6x + 7$ $\begin{cases} a = 1 \\ b = 6 \\ c = 7 \end{cases}$ $a = 1 > 0$, donc la parabole représentant f est orientée vers le haut (P_3 ou P_1) 1,5	Abscisse du sommet (S) de la parabole : $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2} = -3$ Donc la parabole représentant f est la (P_3).
g	$g(x) = -2(x+3)^2 + 4$: Forme canonique de g En identifiant avec : $g(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ $a = -2 < 0$ donc la parabole représentant g est orientée vers le bas avec $\alpha = -3$ et $\beta = 4$ Donc (P_4) représente g 1,5	
h	$h(x) = 2x^2 - 4x + 3$ $\begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = 3 \end{cases}$ $a = 2 > 0$, donc la parabole représentant h est orientée vers le haut. 1,5	Abscisse du sommet (S) de la parabole : $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{4} = 1$ Donc (P_1) représente h

3) On considère le trinôme i d'expression : $i(x) = -x^2 + 2x + 3$

a) Déterminer par la méthode de votre choix la forme canonique de i

Première méthode :

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases} \quad \alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$\beta = i(\alpha) = i(1) = -1 + 2 + 3 = 4$$

1,5 Or, la forme canonique de i est :

$i(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

Donc : $\underline{i(x) = -(x-1)^2 + 4}$

Deuxième méthode :

$$i(x) = -(x^2 - 2x - 3)$$
$$= -\left[(x-1)^2 - 1 - 3\right]$$
$$= \underline{-(x-1)^2 + 4}$$

b) Montrer que $i(x) = -(x + 1)(x - 3)$

$$-(x+1)(x-3) = -(x^2 - 3x + x - 3)$$
$$= -x^2 + 3x - x + 3$$
$$= -x^2 + 2x + 3 = i(x)$$

0,5 Donc $\underline{i(x) = -(x+1)(x-3)}$

c) Déterminer les variations de i :

$a = -1 < 0$; donc i est d'abord strictement croissante, puis strictement décroissante

D'autre part, $\alpha = 1$ et $\beta = 4$ (question 3 a))

1 D'où le tableau de variations de i :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Variation de i		$\nearrow$	4	$\searrow$	

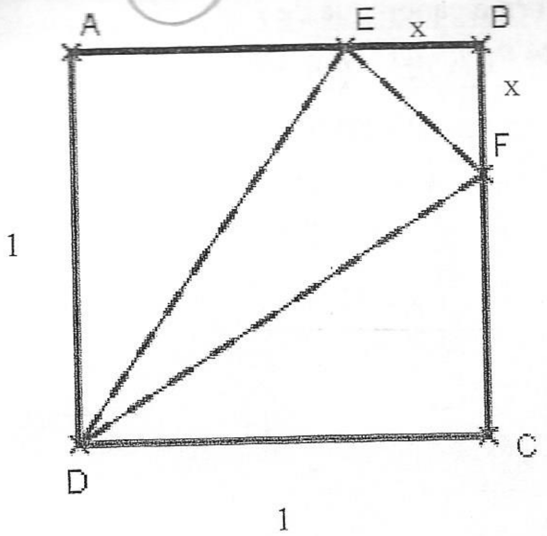
d) Parmi les différentes écritures de i (écriture développée et réduite, forme factorisée et forme canonique) , utiliser la plus appropriée pour répondre à chacune des questions suivantes **en justifiant à l'aide de calculs :**

Maximum de i sur ℝ et valeur de x en laquelle il est atteint :	D'après les variations de i dans la question 3c) $\underline{4 \text{ est le maximum de } i \text{ atteint en } x = 1}$
Antécédent(s) de 0 par i :	$i(x) = -(x+1)(x-3) = 0$ Si $A \times B = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$ $x + 1 = 0$ ou $x - 3 = 0$ $x = -1$ ou $x = 3$ Donc : $\underline{-1 \text{ et } 3 \text{ sont les antécédents de } 0 \text{ par } i}$
L'image de 0 par i :	$i(0) = -0^2 + 2 \times 0 + 3$ $= \boxed{3}$
Résolution de $i(x) = 3$	$i(x) = 3$; $-x^2 + 2x + 3 = 3$ d'où $-x^2 + 2x = 0$ $x(-x+2) = 0$ Si $A \times B = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$ $x = 0$ ou $x = 2$ $\underline{S = \{0 ; 2\}}$

0,5 · 1 · 0,5 · 0,5

Exercice 5 :

5



ABCD est un carré de côté 1.
On place le point E sur le côté [AB] et le point F sur le côté [BC] tels que EB = BF.

L'objectif de l'exercice est de déterminer le maximum de l'aire du triangle EFD

On pose x = EB = BF, et l'aire du triangle EFD est notée f(x).

1) Donner un encadrement de x selon les contraintes de la figure.

0,5 $0 \leq x \leq 1$ (compte-tenu des contraintes de l'énoncé).

2) a) Exprimer, en fonction de x, les aires des triangles EBF, AED, et CDF

1,5

* Triangle EBF : triangle rectangle isocèle en B

$\text{Aire}(EBF) = \dfrac{x^2}{2}$

* Triangle CDF : triangle rectangle en C

$\text{Aire}(CDF) = \dfrac{1\times(1-x)}{2} = \dfrac{1-x}{2}$

* Triangle AED : AED : triangle rectangle en A

$\text{Aire}(AED) = \dfrac{AD\times AE}{2} = \dfrac{1\times(1-x)}{2} = \dfrac{1-x}{2}$

b) En déduire l'expression développée et réduite de f(x)

1

$f(x) = \text{Aire}(EFD) = \text{Aire}(ABCD) - (\text{Aire}(AED) + \text{Aire}(EBF) + \text{Aire}(CDF))$

$= 1 - \left(\dfrac{1-x}{2} + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1-x}{2}\right) = 1 - (1-x) - \dfrac{1}{2}x^2 = \boxed{-\dfrac{1}{2}x^2 + x}$

3) a) Résoudre l'équation f(x) = 0

0,5

$-\dfrac{1}{2}x^2 + x = 0$

$x\left(-\dfrac{1}{2}x + 1\right) = 0$

· Si $A\times B = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$

$x = 0$ ou $-\dfrac{1}{2}x + 1 = 0$

$x = 0$ ou $x = 2$

Donc $S = \{0 ; 2\}$

b) En déduire l'abscisse du sommet de la parabole représentant f. Quelle est son ordonnée ?

1

0 et 2 sont les deux antécédents de 0 par f.
Or, la droite verticale qui passe par le sommet de la parabole est l'axe de symétrie de cette parabole. Donc : $\alpha = \dfrac{0+2}{2} = \boxed{1}$ $\beta = f(\alpha) = f(1) = -\dfrac{1}{2} + 1 = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

4) Dresser le tableau de variations de f et conclure.

Comme $a < 0$, f est d'abord croissante, puis décroissante sur IR

on ne travaille que sur [0 ; 1] (d'après la 1))

0,5

x	0	1
Variations de f	0 ↗	$\dfrac{1}{2}$

Le maximum de l'aire du triangle EFD est $\dfrac{1}{2}$ pour $x = 1$ (Il n'y a pas d'unité fixée dans l'exercice).