

Seconde 2	Corrigé du DS de mathématiques <i>Fonctions affines/ Calculs algébriques/ Signes de produits</i>	Fait le 15/12/14
-----------	--	---------------------

Exercice 1 :

1) $(3x + 5)(4x - 1) \geq 0$ $3x + 5 = 0$ $4x - 1 = 0$ $3x = -5$ $4x = 1$ $x = -\frac{5}{3}$ $x = \frac{1}{4}$ Tableau de signes : <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{5}{3}$</td><td>$\frac{1}{4}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>Signe de $3x + 5$</td><td>-</td><td>○</td><td>+</td><td>+</td></tr><tr><td>Signe de $4x - 1$</td><td>-</td><td>-</td><td>○</td><td>+</td></tr><tr><td>Signe de $(3x + 5)(4x - 1)$</td><td>+</td><td>○</td><td>-</td><td>○</td><td>+</td></tr></table> Donc $S =]-\infty; -\frac{5}{3}] \cup [\frac{1}{4}; +\infty[$	x	$-\infty$	$-\frac{5}{3}$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$	Signe de $3x + 5$	-	○	+	+	Signe de $4x - 1$	-	-	○	+	Signe de $(3x + 5)(4x - 1)$	+	○	-	○	+	b) $(-2x + 3)(7x + 8) < 0$ $-2x + 3 = 0$ $7x + 8 = 0$ $-2x = -3$ $7x = -8$ $x = \frac{8}{7}$ $x = -\frac{3}{2}$ Tableau de signes : <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{8}{7}$</td><td>$\frac{3}{2}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>Signe de $-2x + 3$</td><td>+</td><td>+</td><td>○</td><td>-</td></tr><tr><td>Signe de $7x + 8$</td><td>-</td><td>○</td><td>+</td><td>+</td></tr><tr><td>Signe de $(-2x + 3)(7x + 8)$</td><td>-</td><td>○</td><td>+</td><td>○</td><td>-</td></tr></table> Donc $S =]-\infty; -\frac{8}{7}] \cup [\frac{3}{2}; +\infty[$	x	$-\infty$	$-\frac{8}{7}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	Signe de $-2x + 3$	+	+	○	-	Signe de $7x + 8$	-	○	+	+	Signe de $(-2x + 3)(7x + 8)$	-	○	+	○	-
x	$-\infty$	$-\frac{5}{3}$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$																																							
Signe de $3x + 5$	-	○	+	+																																							
Signe de $4x - 1$	-	-	○	+																																							
Signe de $(3x + 5)(4x - 1)$	+	○	-	○	+																																						
x	$-\infty$	$-\frac{8}{7}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$																																							
Signe de $-2x + 3$	+	+	○	-																																							
Signe de $7x + 8$	-	○	+	+																																							
Signe de $(-2x + 3)(7x + 8)$	-	○	+	○	-																																						
2) $A(y) = (9y + 2)(-5y - 1)$ $9y + 2 = 0$ $-5y - 1 = 0$ $9y = -2$ $-5y = 1$ $y = -\frac{2}{9}$ $y = -\frac{1}{5}$ Tableau de signes : <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{2}{9}$</td><td>$-\frac{1}{5}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>Signe de $9y + 2$</td><td>-</td><td>○</td><td>+</td><td>+</td></tr><tr><td>Signe de $-5y - 1$</td><td>+</td><td>+</td><td>○</td><td>-</td></tr><tr><td>Signe de $(9y + 2)(-5y - 1)$</td><td>-</td><td>○</td><td>+</td><td>○</td><td>-</td></tr></table> Donc : $A(y) > 0$ pour $y \in]-\frac{2}{9}; -\frac{1}{5}[$ $A(y) \leq 0$ pour $y \in]-\infty; -\frac{2}{9}] \cup [-\frac{1}{5}; +\infty[$	x	$-\infty$	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{1}{5}$	$+\infty$	Signe de $9y + 2$	-	○	+	+	Signe de $-5y - 1$	+	+	○	-	Signe de $(9y + 2)(-5y - 1)$	-	○	+	○	-	3) a) $B(x) = (x - 4)^2 - (5x + 2)^2$ $= [(x - 4) + (5x + 2)][(x - 4) - (5x + 2)]$ $= \underline{(6x - 2)(-4x - 6)}$ b) $B(x) > 0$: $6x - 2 = 0$ $-4x - 6 = 0$ $6x = 2$ $-4x = 6$ $x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ $x = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$ <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{3}{2}$</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>Signe de $6x - 2$</td><td>-</td><td>-</td><td>○</td><td>+</td></tr><tr><td>Signe de $-4x - 6$</td><td>+</td><td>○</td><td>-</td><td>-</td></tr><tr><td>Signe de $B(x)$</td><td>-</td><td>○</td><td>+</td><td>○</td><td>-</td></tr></table> Donc : $S =]-\frac{3}{2}; \frac{1}{3}[$	x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$	Signe de $6x - 2$	-	-	○	+	Signe de $-4x - 6$	+	○	-	-	Signe de $B(x)$	-	○	+	○	-
x	$-\infty$	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{1}{5}$	$+\infty$																																							
Signe de $9y + 2$	-	○	+	+																																							
Signe de $-5y - 1$	+	+	○	-																																							
Signe de $(9y + 2)(-5y - 1)$	-	○	+	○	-																																						
x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$																																							
Signe de $6x - 2$	-	-	○	+																																							
Signe de $-4x - 6$	+	○	-	-																																							
Signe de $B(x)$	-	○	+	○	-																																						

Exercice 2 :

Calcul de b :

1) Détermination de g :

$$A \in (AB) \text{ d'où : } \frac{4}{3} \times 0 + b = -2 \text{ Donc : } b = -2$$

$$A(0; -2) \text{ et } B(3; 2)$$

Comme g est affine, $g(x) = ax + b$

Par conséquent :

Calcul de a :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - (-2)}{3 - 0} = \frac{4}{3}$$

$$g(x) = \frac{4}{3}x - 2$$

$$2)a) f(x) = \frac{-3}{4}x + 1$$

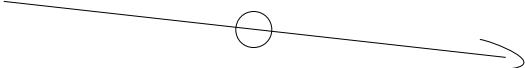
D'où : $a = \frac{-3}{4} < 0$, donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

$$\text{D'autre part, } \frac{-3}{4}x + 1 = 0$$

$$\frac{-3}{4}x = -1$$

$$x = \frac{4}{3}$$

Tableau de variations :

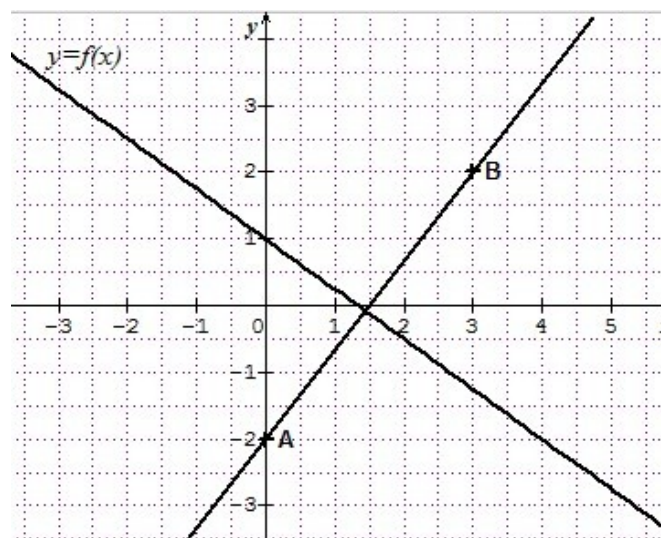
x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
Variations de f			

b)

D'où le tableau de signes de f :

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
Signe de f	+	○	-

3)



Pour représenter f , on calcule les coordonnées de deux points de la droite représentative de cette fonction :

x	0	4
f(x)	1	-2

On obtient donc deux points sur la droite représentant f : $C(0;1)$ et $D(4;-2)$

4) a) $f(x) = g(x)$

$$\frac{-3}{4}x + 1 = \frac{4}{3}x - 2 \quad \text{d'où : } 1 + 2 = \frac{4}{3}x + \frac{3}{4}x \quad \text{c'est-à-dire : } 3 = \frac{16}{12}x + \frac{9}{12}x = \frac{25}{12}x$$

$$\text{Donc } x = \frac{3 \times 12}{25} = \frac{36}{25}$$

$$S = \left\{ \frac{36}{25} \right\}$$

b) La solution trouvée ($= \frac{36}{25} = 1,44$) est l'abscisse du point d'intersection des deux droites.

$$5) a) \quad \frac{-3}{4}x + 1 > \frac{4}{3}x - 2$$

$$1 + 2 > \frac{4}{3}x + \frac{3}{4}x \text{ d'où : } 3 > \frac{25}{12}x \quad \text{Donc } x < \frac{36}{25}$$

$$S =]-\infty ; \frac{36}{25} [$$

b) Pour $x < \frac{36}{25}$, la droite représentant f est située strictement au-dessus de celle représentant g

Exercice 3 :

$$1) (2x+3)(x-1) = 2x^2 - 2x + 3x - 3 \\ = 2x^2 + x - 3 = f(x)$$

$$\text{Donc } f(x) = (2x+3)(x-1) \quad (\text{forme factorisée})$$

$$2) 2(x + \frac{1}{4})^2 - \frac{25}{8} = 2(x^2 + 2 \times x \times \frac{1}{4} + \frac{1}{16}) - \frac{25}{8} \\ = 2x^2 + x + \frac{1}{8} - \frac{25}{8} \\ = 2x^2 + x - \frac{24}{8} \\ = 2x^2 + x - 3 = f(x)$$

$$\text{Donc : } f(x) = 2(x + \frac{1}{4})^2 - \frac{25}{8} \quad (\text{forme canonique})$$

$$3)a) f(-\frac{3}{2}) = (2 \times (-\frac{3}{2}) + 3)(-\frac{3}{2} - 1) \\ = (-3 + 3)(-\frac{3}{2} - 1) \\ = 0$$

$$b) f(-\frac{1}{4}) = 2(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4})^2 - \frac{25}{8} \\ = 2 \times 0 - \frac{25}{8}$$

$$= -\frac{25}{8}$$

c) On doit résoudre $f(x) = -3$ pour déterminer les antécédents éventuels de -3 par f .

$$\text{D'où : } 2x^2 + x - 3 = -3$$

$$\text{C'est-à-dire : } 2x^2 + x = 0$$

$$x(2x + 1) = 0$$

Si $A \times B = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad 2x + 1 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{2}$$

Donc : 0 et $-\frac{1}{2}$ sont les deux antécédents de -3 par f

$$d) f(x) = 0 \text{ d'où : } (2x+3)(x-1) = 0$$

Si $A \times B = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$

$$2x+3 = 0 \quad \text{ou} \quad x-1 = 0$$

$$x = -\frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad x = 1$$

$$\text{Donc : } S = \{-\frac{3}{2} ; 1\}$$

$$e) f(x) = -\frac{49}{8} \quad \text{D'où : } 2(x + \frac{1}{4})^2 - \frac{25}{8} = -\frac{49}{8}$$

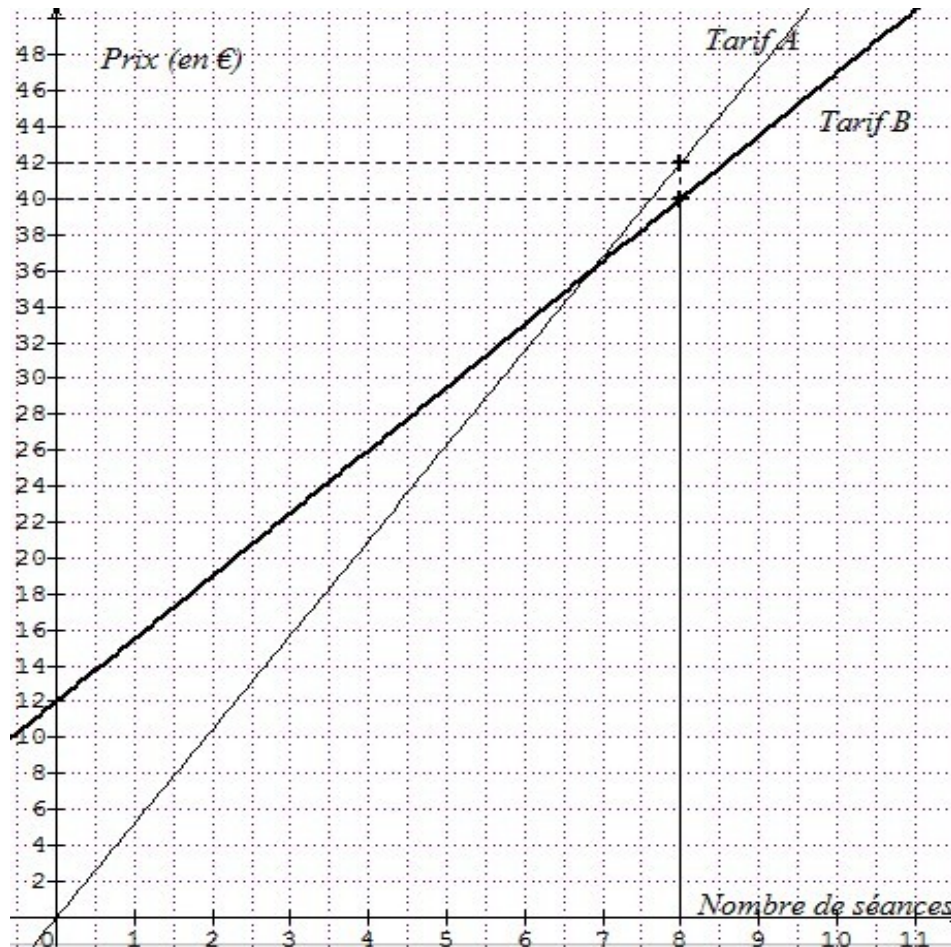
$$\text{D'où : } 2(x + \frac{1}{4})^2 - \frac{25}{8} + \frac{49}{8} = 0 \quad \text{C'est-à-dire : } 2(x + \frac{1}{4})^2 + 3 = 0$$

D'où : $2(x + \frac{1}{4})^2 = -3$. C'est impossible ,car un carré est toujours positif dans les réels.

Donc $S = \emptyset$

Exercice 4 :

- 1) a) Avec le tarif A : **$f(x) = 5,25x$**
 b) Avec le tarif B : **$g(x) = 12 + 3,50x$** (d'après l'énoncé)
 2)



Représentation graphique des deux droites

- 3) a) Résoudre graphiquement $f(x) > g(x)$ consiste à chercher les abscisses des points de la droite de f situés strictement au-dessus de celle de g.

$$S =]6,9; +\infty[$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f(x) > g(x) \quad \text{d'où : } 5,25x &> 12 + 3,50x \\ 5,25x - 3,50x &> 12 \\ 1,75x &> 12 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } x > \frac{12}{1,75} \simeq 6,86 \simeq \underline{\underline{6,9}}$$

- 4) Comme $8 > 6,9$ alors $f(8) > g(8)$ donc **Jean-Baptiste choisira le tarif B**, car il est moins cher.

- 5) a) Chaque séance va voir son prix augmenter de 51% :

Le prix va passer de 3,50€ à $3,50 \times (1 + \frac{51}{100}) = 3,50 \times 1,51 \simeq \underline{\underline{5,29 \text{ €}}}$

- b) Pour 8 séances, il va payer $5,25 \times 8 = 42 \text{ €}$ avec le tarif A et $5,29 \times 8 + 12 = 54,32 \text{ €}$ avec le tarif B

Il va donc choisir le tarif A