

Exercice (1) : $E(-5; 3)$ $F(2; 8)$ $G(0; -4)$ $H(6; -1)$

(1)

1) M_1 : milieu de $[EF]$:

$$\left. \begin{aligned} x_{M_1} &= \frac{x_E + x_F}{2} = \frac{-5 + 2}{2} = -\frac{3}{2} \\ y_{M_1} &= \frac{y_E + y_F}{2} = \frac{3 + 8}{2} = \frac{11}{2} \end{aligned} \right\} M_1 \left(-\frac{3}{2}; \frac{11}{2} \right)$$

M_2 : milieu de $[GH]$:

$$\left. \begin{aligned} x_{M_2} &= \frac{x_G + x_H}{2} = \frac{0 + 6}{2} = 3 \\ y_{M_2} &= \frac{y_G + y_H}{2} = \frac{-4 + (-1)}{2} = -\frac{5}{2} \end{aligned} \right\} M_2 \left(3; -\frac{5}{2} \right)$$

2) $EF = \sqrt{(x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2}$

$$= \sqrt{(2 - (-5))^2 + (8 - 3)^2}$$

$$= \sqrt{49 + 25}$$

$$= \sqrt{74}$$

$GH = \sqrt{(x_H - x_G)^2 + (y_H - y_G)^2}$

$$= \sqrt{(6 - 0)^2 + (-1 + 4)^2}$$

$$= \sqrt{36 + 9}$$

$$= \sqrt{45}$$

$$= 3\sqrt{5}$$

Exercice (2) : K est l'image de M dans la symétrie de centre E .

a) $M(1; 3)$ $K(-7; 1)$ E est le milieu de $[MK]$

$$\left. \begin{aligned} x_E &= \frac{x_M + x_K}{2} = \frac{1 + (-7)}{2} = -3 \quad \text{et} \quad y_E = \frac{y_M + y_K}{2} = \frac{3 + 1}{2} = 2 \end{aligned} \right\} E(-3; 2)$$

b) $M(3; -9)$ $E(-1; 1)$ Soit $K(x_K; y_K)$. E est le milieu de $[MK]$

on a $x_E = \frac{x_M + x_K}{2}$ d'où : $-1 = \frac{3 + x_K}{2}$ d'où $3 + x_K = -2$
 $x_K = -2 - 3 = -5$

$y_E = \frac{y_M + y_K}{2}$ d'où : $1 = \frac{-9 + y_K}{2}$ d'où : $-9 + y_K = 2$
 $y_K = 2 + 9 = 11$

$K(-5; 11)$

Exercice (3): $I(1; -8)$ $J(7; -2)$ $K(3; 2)$ et $L(-3; -4)$. (2)

• Soient M , N milieux respectifs de $[IK]$ et $[JL]$.

$$x_M = \frac{x_I + x_K}{2} = \frac{1+3}{2} = 2 \quad \text{et} \quad y_M = \frac{y_I + y_K}{2} = \frac{-8+2}{2} = -3 \quad \left. \vphantom{\frac{x_I + x_K}{2}} \right\} M(2; -3)$$

$$x_N = \frac{x_J + x_L}{2} = \frac{7-3}{2} = 2 \quad \text{et} \quad y_N = \frac{y_J + y_L}{2} = \frac{-2-4}{2} = -3 \quad \left. \vphantom{\frac{x_J + x_L}{2}} \right\} N(2; -3)$$

$$\text{Donc } M = N$$

Un quadrilatère qui a ses diagonales qui se coupent en leur milieu est un parallélogramme. Donc $IJKL$ est un parallélogramme.

• calcul de IJ : $IJ = \sqrt{(x_J - x_I)^2 + (y_J - y_I)^2} = \sqrt{(7-1)^2 + (-2+8)^2}$
 $= \sqrt{36 + 36}$
 $= \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

calcul de JK : $JK = \sqrt{(x_K - x_J)^2 + (y_K - y_J)^2} = \sqrt{(3-7)^2 + (2+2)^2}$
 $= \sqrt{16 + 16}$
 $= \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

D'où $IJKL$ n'est pas un losange (a fortiori pas un carré)

• calcul de IK : $IK = \sqrt{(x_K - x_I)^2 + (y_K - y_I)^2} = \sqrt{(3-1)^2 + (2+8)^2}$
 $= \sqrt{4 + 100}$
 $= \sqrt{104}$

$$\text{Or } IK^2 = 104 \quad \text{et} \quad IJ^2 + JK^2 = 72 + 32 = 104$$

$$\text{D'où } IK^2 = IJ^2 + JK^2$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle IJK est rectangle en J .

Or, un parallélogramme possédant un angle droit est un rectangle.

Par conséquent: $IJKL$ est un rectangle.

Exercice (4)

(3)

$$A(6; 5) \quad B(2; -3) \quad C(-4; 0)$$

1) Vrai repère

$$2) M \text{ milieu de } \{AB\}: \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{6+2}{2} = 4 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5-3}{2} = 1 \end{cases} \quad \underline{M(4; 1)}$$

$$N \text{ milieu de } \{BC\}: \begin{cases} x_N = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{2-4}{2} = -1 \\ y_N = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-3+0}{2} = -\frac{3}{2} \end{cases} \quad \underline{N(-1; -\frac{3}{2})}$$

$$P \text{ milieu de } \{AC\}: \begin{cases} x_P = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{6-4}{2} = 1 \\ y_P = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{5+0}{2} = \frac{5}{2} \end{cases} \quad \underline{P(1; \frac{5}{2})}$$

3) Vrai repère

$$4) AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(2-6)^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{16+64} = \underline{\sqrt{80}}$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(-4-2)^2 + (0+3)^2} = \sqrt{36+9} = \underline{\sqrt{45}}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-4-6)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{100+25} = \underline{\sqrt{125}}$$

$$5) \text{ On a: } AC^2 = 125 \quad \text{et} \quad AB^2 + BC^2 = 80 + 45 = 125$$

$$\text{D'où } AC^2 = AB^2 + BC^2$$

La réciproque du théorème de Pythagore est vérifiée,

D'où ABC est un triangle rectangle en B

6) P étant le milieu de {AC} et B le sommet où se situe l'angle droit, [BP] est la médiane relative à l'hypoténuse du triangle ABC.

Or, dans un triangle rectangle, la médiane relative à l'hypoténuse a une longueur égale à la moitié de celle de l'hypoténuse.

$$\text{D'où } BP = \frac{1}{2} AC = \frac{\sqrt{125}}{2} = \frac{\sqrt{5 \times 25}}{2} = \underline{\underline{\frac{5\sqrt{5}}{2}}}$$

7) Comme on sait que $B(2; -3)$ et $P(1; \frac{5}{2})$, on peut calculer BP:

$$BP = \sqrt{(x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2} = \sqrt{(1-2)^2 + (\frac{5}{2}+3)^2} = \sqrt{1 + (\frac{11}{2})^2} = \sqrt{\frac{4}{4} + \frac{121}{4}} \\ = \sqrt{\frac{125}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{125} = \underline{\underline{\frac{1}{2} \times 5\sqrt{5}}}$$