

Seconde

Corrigé du contrôle
commun de mathématiques

(Fait le
17/02/2014)

①

Exercice 1):

x	$-\infty$	0	1	3	5	$+\infty$
Partie A): 1) Voir tableau Variation de f				4		

2) Sur $[0; 5]$, $f(x) \leq 4$ avec $f(3) = 4$
d'où 4 est le maximum de f sur $[0; 5]$

Sur $[0; 5]$, $f(x) \geq -5$ avec $f(0) = -5$
d'où -5 est le minimum de f sur $[0; 5]$

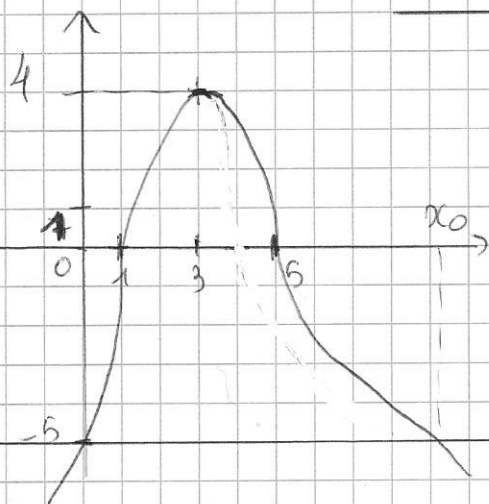
3) Sur $[3, 5; 4]$, f est strictement décroissante
d'où $f(3, 5) > f(4)$

4) On a vu dans la question 2) que 4 est le maximum de f sur $[0; 5]$. D'après le tableau de variation, 4 est le maximum de f sur $\mathbb{R}$. Ce maximum est atteint par $x = 3$. (abscisse)

Donc l'équation $f(x) = 4$ possède une seule solution :

$$S = \{3\}$$

5 a)



b) On trace la droite horizontale à l'ordonnée -5.

Les solutions sont les abscisses des points de la courbe de f situés strictement en-dessous de la droite précédente.

$$S =]-\infty; 0[\cup]x_0; +\infty[$$

Partie B):

1) $f(x) = x^2 - 25 - 2(x^2 + 2x - 5x - 10)$

$$= x^2 - 25 - 2x^2 + 6x + 20 \quad \left| \begin{array}{l} 2) f(x) = (x+5)(x-5) - 2(x-5)(x+2) \\ = (x-5)(x+5 - 2(x+2)) \\ = (x-5)(-x+1) \end{array} \right.$$

$$= \underline{-x^2 + 6x - 5}$$

(2)

3) $\underline{4 - (x-3)^2} = 4 - (x^2 - 6x + 9)$
 $= -x^2 + 6x - 5 = \underline{f(x)}$ (d'après 1))

4) a) Avec l'écriture (3): $f(3) = 4 - (\underbrace{3-3}_0)^2$
 $= \underline{4}$

b) x est un antécédent de 0 par $f \Leftrightarrow f(x) = 0$

Avec l'écriture (4): $(1-x)(x-5) = 0$

$\Leftrightarrow 1-x=0$ ou $x-5=0$

$\Leftrightarrow x=1$ ou $x=5$ $S = \{1; 5\}$

1 et 5 sont les antécédents de 0 par f

c) Avec l'écriture (4): $(1-x)(x-5) = f(x)$

$1-x \geq 0$
 $x \leq 1$

$x-5 \geq 0$
 $x \geq 5$

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$	
Signe de $1-x$	+	0	-	-	
Signe de $x-5$	-	-	0	+	
Signe de f	-	0	+	0	-

Donc: $f(x) \geq 0$ pour $x \in [1; 5]$

$f(x) < 0$ pour $x \in]-\infty; 1[\cup]5; +\infty[$

d) Avec l'écriture (3): $4 - (x-3)^2 = 4 - (x-3)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x-3=0$

$\Leftrightarrow x=3$

Donc: $S = \{3\}$

e) Avec l'écriture (2): $-x^2 + 6x - 5 < -5$

$\Leftrightarrow -x^2 + 6x < 0$

$\Leftrightarrow x(-x+6) < 0$

$$x > 0$$

$$-x + 6 > 0$$

$$x$$

$$-\infty$$

$$0$$

$$6$$

$$+\infty$$

(3)

$$x < 6$$

Signe de x	-	0	+	+
Signe de $-x+6$	+	+	0	-
Signe de $x(-x+6)$	-	0	+	-

$$\text{Donc } S =]-\infty; 0] \cup]6; +\infty[$$

Exercice (2) :

Notes	5	6	7	8	9	11	12	13	14	15	16	17	18
Effectifs	3	2	5	1	(4)	6	2	3	2	2	2	2	1
ECC	3	5	10	11	15	21	23	26	28	30	32	34	35

1) Il y a 35 élèves en tout et la somme des effectifs pour les autres notes est égale à : $3+2+5+1+6+2+3+2+2+2+2+1 = 31$

Donc : $35 - 31 = 4$ élèves ont obtenu 9.

2) a)
$$\bar{x} = \frac{5 \times 3 + 6 \times 2 + 7 \times 5 + 8 \times 1 + 9 \times 4 + 11 \times 6 + 12 \times 2 + 13 \times 3 + 14 \times 2 + 15 \times 2 + 16 \times 2 + 17 \times 2 + 18 \times 1}{35}$$

$$= \frac{317}{35}$$

$$= \boxed{9,057}$$

b) Il y a 35 d'effectif total, or 35 est impair
La médiane est à la $\frac{35+1}{2}$ ième position, c'est-à-dire 18 ième position.
Donc : la médiane est 11 (en utilisant les ECC).

c) - Position de Q_1 : $\frac{N}{4} = \frac{35}{4} = 8,75$ - On prend la 9 ième note.
- Donc : $Q_1 = 7$

d) - Position de Q_3 : $\frac{3N}{4} = 26,25$ - On prend la 27 ième note
- Donc : $Q_3 = 14$

e) Écart interquartile : $Q_3 - Q_1 = 14 - 7 = \boxed{7}$.

3) Les 2 classes ont la même moyenne, la même médiane et le même 1^{er} quantile.

Étendue de la 1^{ère} classe: $18 - 5 = 13$

Étendue de la 2^{ème} classe: $19 - 2 = 17$.

Écart interquantile de la 1^{ère} classe: 7

Écart interquantile de la 2^{ème} classe: $12 - 7 = 5$

Dans la 2^{ème} classe, les notes sont plus "concentrées" autour de la médiane.

4) Affirmation ①: $[7; 14] = [Q_1; Q_3]$: intervalle interquantile
Entre 7 et 14, il y a $5 + 1 + 4 + 6 + 2 + 3 + 2 = 23$ élèves!

$\frac{23}{35} \times 100 \approx 65,7\%$ donc l'affirmation ① est fausse.

Affirmation ②: $Q_3 = 12$: 75% au moins des notes sont inférieures ou égales à 12. L'affirmation ② est également fausse.

Exercice ③: A(-2; 0) B(-1; 3) C(4; -2)

1) Voir le repère

$$\begin{aligned} 2) BC &= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(4 + 1)^2 + (-2 - 3)^2} = \sqrt{25 + 25} \\ &= \sqrt{50} = \sqrt{2 \times 25} \\ &= 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$AB = \sqrt{10} \text{ et } AC = 2\sqrt{10}$$

$$3) BC = \sqrt{50} \quad AB = \sqrt{10} \text{ et } AC = 2\sqrt{10}$$

$[BC]$ est le plus grand côté:

$$BC^2 = 50$$

$$\left| \begin{array}{l} AB^2 = 10 \text{ et } AC^2 = 4 \times 10 = 40 \\ AB^2 + AC^2 = 50 \end{array} \right.$$

$$\text{Donc: } BC^2 = AB^2 + AC^2$$

La réciproque du théorème de Pythagore est vérifiée.

Donc: le triangle ABC est rectangle en A

$$4) K \text{ milieu de } [BC]: x_K = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-1 + 4}{2} = \frac{3}{2}$$

$$y_K = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{3 + (-2)}{2} = \frac{1}{2}$$

$$K \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2} \right)$$

(5)

5) On a démontré que le triangle ABC est rectangle en A (question 3))
Or, dans un triangle rectangle, le centre du cercle circonscrit est situé au milieu de l'hypoténuse.

Donc : le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est le milieu de $[BC]$, c'est-à-dire K

De plus, $BC = 5\sqrt{2}$ (d'après la question 2))

Donc : le rayon du cercle circonscrit est $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

6) a) $A(-2; 0)$ $B(-1; 3)$

Soit $f(x) = ax + b$ (f est une fonction affine).

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 0}{-1 - (-2)} = \frac{3}{1} = 3$$

D'où : $f(x) = 3x + b$ - Or, $A \in (AB) \Leftrightarrow 3 \times (-2) + b = 0$
 $\Leftrightarrow b = 6$

Donc : $f(x) = 3x + 6$

b) Soit D $(-3; -3)$: $3 \times (-3) + 6 = -9 + 6 = -3$

Donc $D \in (AB)$

Exercice (4):

1)	M	50	110	120
	C_1	$0,4 \times 50 + 23$ $= 43$	$0,4 \times 110 + 23$ $= 67$	$0,4 \times 120 + 23$ $= 71$
	C_2	$0,6 \times 50$ $= 30$	$0,6 \times 110$ $= 66$	$0,6 \times 120$ $= 72$
	Max	43	66	71

2) a) pour x km parcourus :

$$f(x) = 0,40 \times x + 23 = 0,4x + 23$$

$$g(x) = 0,60x$$

b) voir repère

c) - Pour $x \geq 115$ km, $f(x) \leq g(x)$

Tarif (C_1) plus intéressant que le tarif (C_2)

Pour $x < 115$ km, Tarif (C_1) moins intéressant que le tarif (C_2)

d) $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow 0,4x + 23 \geq 0,6x$
 $\Leftrightarrow 23 \geq 0,2x$
 $\Leftrightarrow \frac{23}{0,2} \geq x$
 $\Leftrightarrow \underline{115 \geq x}$

(6)

e) Pour $n = 50$ et $n = 110$, on a bien, $f(n) \geq g(n)$
 (car $n \leq 115$) c'est-à-dire Tarif (1) mais intéressant que le tarif (2).
 D'où les résultats du tableau.

Exercice (5):

1) a) ABCD est un carré de côté mesurant 4 cm.

[BD] est une diagonale de ce carré.

Dans le triangle BDC, rectangle en C, on applique le théorème de Pythagore: $BD^2 = BC^2 + CD^2$ d'où $BD^2 = 4^2 + 4^2 = 32$

$$\text{D'où } BD = \sqrt{32} = \sqrt{2 \times 16} = \underline{4\sqrt{2}}$$

b) O étant le centre du carré ABCD, O est le point d'intersection des 2 diagonales de ce carré. D'autre part, O est le milieu de ces 2 diagonales. En particulier, O est le milieu de [DB]

$$\text{D'où } DO = \frac{4\sqrt{2}}{2} = \underline{2\sqrt{2}}$$

2) a) Les rectangles ABFE et EADH ont les mêmes mesures.

[ED] est une diagonale de EADH et [EB] une diagonale de ABFE. Or, dans un rectangle, les diagonales ont la même longueur.
 Donc: $\underline{ED = EB}$.

b) Comme $ED = EB$, le triangle EDB est isocèle en E.

c) Dans le triangle EBD, isocèle en E:

O est le milieu de [BD] d'où (EO) est la médiane issue du sommet principal du triangle EBD.

Or, dans un triangle isocèle, la médiane issue du sommet principal est en particulier médiatrice et hauteur. (7)

Donc $(EO) \perp (BD)$

d) On se place dans le triangle EOB , rectangle en O :

D'après le théorème de Pythagore: $EB^2 = EO^2 + OB^2$

$$\text{Or, } ED = 4\sqrt{5} \quad (= EB \text{ (question 2a)})$$

$$\text{D'où } (4\sqrt{5})^2 = (EO)^2 + (2\sqrt{2})^2 \quad \text{d'où } 80 = EO^2 + 8$$
$$EO^2 = 72 \quad \text{donc } EO = \sqrt{72} = \boxed{6\sqrt{2}}$$

$$\text{e) } \text{Aire}(EBD) = \frac{BD \times EO}{2} = \frac{4\sqrt{2} \times 6\sqrt{2}}{2} = \underline{24 \text{ cm}^2}$$

$$\text{3) a) } V(ABDE) = \frac{1}{3} \times \text{Aire}(ABD) \times AE \quad \text{or, } \text{Aire}(ABD) = \frac{1}{2} \text{Aire}(ABC) = \frac{16}{2} = 8 \text{ cm}^2$$
$$\text{Donc: } V(ABDE) = \frac{1}{3} \times 8 \times 8 = \frac{64}{3} \text{ cm}^3 \quad (= 21,3 \text{ cm}^3)$$

$$\text{b) En prenant comme base } (EBD), \quad V(ABDE) = \frac{1}{3} \text{Aire}(EBD) \times AI$$

$$\text{Or, } \text{Aire}(EBD) = 24 \text{ cm}^2 \text{ (question 2) e)}$$

$$\text{d'où } \frac{64}{3} = \frac{1}{3} \times 24 \times AI$$

$$\text{Donc } AI = \frac{64}{24} = \frac{8 \times 8}{8 \times 3} = \boxed{\frac{8}{3} \text{ cm}} \quad (= 2,7 \text{ cm})$$