1ère S

Corrigé du bac blanc n°2 (1)

(Fait le 09/04/13)

Exercice (1):

Surface initiale : U_0 Surface de gazon sans chiendent au bout de n années : U_n

Partie (A):

1) Comme tous les ans, 20 % est remplacé par du chiendent donc il reste 80% de gazon par rapport à l'année précédente. D'autre part, chaque année, on ajoute 50 m² de gazon (en ayant supprimé le chiendent).

Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $U_{n+1} = \frac{80}{100} \times U_n + 50 = 0,8\,U_n + 50$

2) $U_2 = 1370$. D'après la formule précédente : $U_2 = 0,8U_1 + 50$

d'où $\frac{U_2 - 50}{0,8} = U_1 = \frac{1320}{0,8} = 1650$

On a : $U_1 = 0,8U_0 + 50$ d'où $U_0 = \frac{U_1 - 50}{0,8} = \frac{1650 - 50}{0,8} = 2000$

3) a) N = 4 :

Valeur de I	0	1	2	3	4
Affichage de U	2000	1650	1370	1146	966,8

b) Il affiche les termes de la suite $(U_n)_n$ définie précédemment. L'utilisateur entre la valeur de N. L'algorithme calcule et affiche les N+1 premiers termes de la suite $(U_n)_n$ (en commençant à $n = 0$).

Partie (B): $V_n = U_n - 250$

1) Soit $n \in \mathbb{N}$: $V_{n+1} = U_{n+1} - 250 = 0,8U_n + 50 - 250 = 0,8U_n - 200 = 0,8(U_n - 250)$

$= 0,8\,V_n$

Donc $(V_n)_n$ est une suite géométrique de 1er terme $V_0 = U_0 - 250 = 2000 - 250 = 1750$

et de raison 0,8.

(2)

2) Comme $(V_n)_n$ est géométrique :

$$\underline{V_n} = V_0 \times 0{,}8^n = \underline{1750 \times 0{,}8^n}$$

3) Or, $U_n = V_n + 250$ d'où $\underline{U_n = 1750 \times 0{,}8^n + 250}$

4) $\frac{1}{4} \times 2000 = 500$ (le quart de la surface initiale)

A la calculatrice : $1750 \times 0{,}8^8 + 250 \simeq 544$

$1750 \times 0{,}8^9 + 250 \simeq 485$

Donc Anastase gardera plus du quart de sa pelouse sans chiendent pendant 8 ans

Exercice (2) : ABC est un triangle : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non-colinéaires

1ère partie :

1) $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AL}$ (relation de Chasles)

$$= \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} = \underline{\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}}$$

2) $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$

$$= \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$$

$$\underline{\overrightarrow{KM} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{3}\overrightarrow{AC}}$$

$\frac{3}{4} \times \frac{5}{3} = \frac{5}{4}$ et $\frac{5}{6} \times \frac{3}{2} = \frac{5 \times \cancel{3}}{2 \times \cancel{3} \times 2} = \frac{5}{4}$ donc $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{KM}$ sont colinéaires

De plus, ils ont un point commun

Donc : K, L et M sont alignés

2ième partie : On se place dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

1) $\underline{A(0;0)}$ $\overrightarrow{AB} = 1\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AC}$ d'où $\underline{B(1;0)}$

$\overrightarrow{AC} = 0\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AC}$ d'où $C(0;1)$

$\overrightarrow{AK} = 0\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ d'où $K\left(0 ; -\frac{3}{2}\right)$

$\overrightarrow{AL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AC}$ d'où $L\left(\frac{3}{4} ; 0\right)$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$ (relation de Chasles)

$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

Donc $M\left(\frac{5}{6} ; \frac{1}{6}\right)$

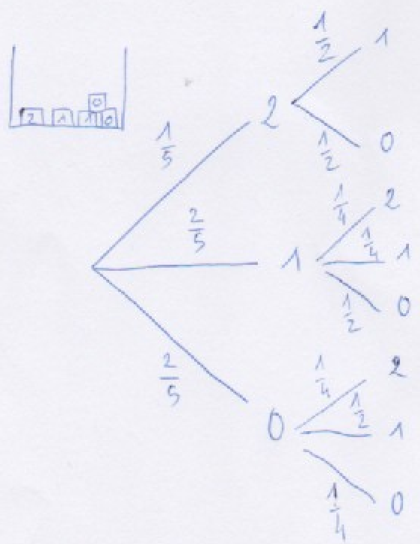
2) $\overrightarrow{KL}\left(\frac{3}{4} ; \frac{3}{2}\right)$ $\overrightarrow{KM}\left(\frac{5}{6} ; \frac{1}{6} + \frac{3}{2}\right)$

$\overrightarrow{KM}\left(\frac{5}{6} ; \frac{5}{3}\right)$ $\frac{3}{4} \times \frac{5}{3} = \frac{5}{\cancel{6}_2} \times \frac{\cancel{3}}{2} = \frac{5}{4}$

Donc $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{KM}$ sont colinéaires
ils ont un point commun
} Par conséquent : K, L et M sont alignés.

Exercice 3 :

1)



Issue : 21

Issue : 20

Issue : 21

Issue : 11

Issue : 10

Issue : 20

Issue : 10

Issue : 00

2) Loi de probabilité :

Nbre	00	10	11	20	21
p_i	$\frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$	$\frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{2}$ $\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$	$\frac{1}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$

(on a bien : $\frac{1}{10} + \frac{2}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 1$)

3) a) $X(\Omega) = \{-3 ; -5 ; 6\}$

b)

x_i	-3	-5	6
p_i	$\frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$	$\frac{2}{5} + \frac{1}{10} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

($\frac{1}{10} + \frac{1}{2} + \frac{2}{5} = 1$)

c) $E(X) = -3 \times \frac{1}{10} - 5 \times \frac{1}{2} + 6 \times \frac{2}{5} = -\frac{3}{10} - \frac{5}{2} + \frac{12}{5} = -\frac{3}{10} - \frac{25}{10} + \frac{24}{10} = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}$

d) $E(X) < 0$ donc le jeu n'est pas équitable

4) On a $E(X) = -3 \times \frac{1}{10} - 5 \times \frac{1}{2} + a \times \frac{2}{5}$

$= \frac{-3-25}{10} + \frac{4a}{10} = \frac{-28+4a}{10}$

Jeu équitable $\Leftrightarrow E(X) = 0 \Leftrightarrow -28 + 4a = 0$

$\Leftrightarrow 4a = 28$

$\Leftrightarrow a = \frac{28}{4} = 7$

Le joueur doit gagner 7 € pour que le jeu soit équitable

Exercice 4 :

Partie 1.

1) Pour (T_0) :

(T_0) droite oblique donc son équation réduite est de la forme $y = mx + p$

$m = \frac{3}{1} = 3$ et p : ordonnée à l'origine $= 4$

Donc : $(T_0) : y = 3x + 4$

Pour (T_2) : (T_2) droite oblique donc son équation réduite est de la forme $y = mx + p$

$m = -\frac{2}{2} = -1$ $\quad p = 4$ $\quad$ Donc : $(T_2) : y = -x + 4$

2)
a) $f(x) = \frac{3x+4}{x^2+1}$ $\quad f = \frac{u}{v}$ $\quad f$ est dérivable sur $[-4;4]$

on pose $u(x) = 3x+4$ $\quad v(x) = x^2 + 1$ $\quad u'(x) = 3$ $\quad v'(x) = 2x$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ $\quad$ D'où $f'(x) = \frac{3(x^2+1) - 2x(3x+4)}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^2+3-6x^2-8x}{(x^2+1)^2}$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-3x^2-8x+3}{(x^2+1)^2}}$$

b) $(T_0) : y = f'(0)(x-0) + f(0) = \frac{3}{1^2}x + \frac{4}{1} = 3x + 4$

$(T_2) : y = f'(2)(x-2) + f(2) = \frac{-12-16+3}{5^2}(x-2) + \frac{10}{5}$

$= -(x-2) + 2 = -x + 4$

$(x^2+1)^2 > 0$ donc le signe de f' dépend uniquement de celui de $-3x^2-8x+3$ (5)

Calcul de Δ : $\Delta = b^2 - 4ac = 64 + 4\times 3\times 3$

$= 100 > 0$ le binôme admet 2 racines

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8+10}{-6} = \frac{18}{-6} = -3$ | $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8-10}{-6} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$

Le binôme est du signe de a à l'extérieur des racines.

c'est-à-dire :

$-3x^2-8x+3 \leq 0$ pour $x \in [-4;-3] \cup [\frac{1}{3};4]$

$-3x^2-8x+3 > 0$ pour $x \in]-3;\frac{1}{3}[$

Pour $x \in [-4;-3] \cup [\frac{1}{3};4]$, $f'(x) \leq 0$ c'est-à-dire f décroissante

Pour $x \in [-3;\frac{1}{3}]$, $f'(x) \geq 0$ c'est-à-dire f croissante.

D'où le tableau de variations suivant :

x	-4		-3		$\frac{1}{3}$		4
signe de f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f	$-\frac{8}{17}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{9}{2}$	↘	$\frac{16}{17}$

$f(-4) = \frac{3\times(-4)+4}{(-4)^2+1} = \frac{-8}{17}$

$f(-3) = \frac{3\times(-3)+4}{(-3)^2+1} = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{3}) = \frac{1+4}{\frac{1}{9}+1} = \frac{5}{\frac{10}{9}} = 5\times\frac{9}{10} = \frac{9}{2}$

$f(4) = \frac{3\times4+4}{4^2+1} = \frac{16}{17}$

d) $f'(\frac{1}{3}) = 0$ et f' change de signe en $x = \frac{1}{3}$. Or, $f(\frac{1}{3}) = \frac{9}{2} = 4,5$

Donc : 4,5 est un extremum local (= un maximum ici)

Ce maximum est atteint en $x = \frac{1}{3}$

e) $f'(-3) = 0$ et f' change de signe en $x = -3$. Or, $f(-3) = -\frac{1}{2}$

Donc : $-\frac{1}{2}$ est un extremum local de f atteint en $x = -3$

Partie B :

1) Dans le triangle AFC, (ME)//(FC), on peut appliquer le théorème de Thalès :

$\frac{AM}{AF} = \frac{ME}{FC} = \frac{AE}{AC} \iff \frac{50-R}{50} = \frac{r}{12} \iff 12(50-R) = 50r$

$\iff 50 - R = \frac{50}{12}r$

$\iff R = 50 - \frac{50}{12}r = 50(1-\frac{r}{12})$

2) $V(r) = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi r^2}{3} \times 50\left(1 - \frac{r}{12}\right)$

$$\underline{V(r) = \frac{1}{3} 50\pi \left(r^2 - \frac{1}{12} r^3\right)}$$

3) V dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est un polynôme.

$$V'(r) = \frac{1}{3} 50\pi \left(2r - \frac{3}{12} r^2\right) = \frac{1}{3} 50\pi \left(2r - \frac{1}{4} r^2\right)$$

$$= \frac{1}{3} 50\pi r \left(2 - \frac{1}{4} r\right)$$

Signe de $V'(r)$ dépend uniquement de $2 - \frac{1}{4} r$

$$2 - \frac{1}{4} r \geq 0 \iff \frac{1}{4} r \leq 2$$

$$\iff r \leq 8$$

D'où le tableau de variations de V.

x	0		8		12
signe de V'		$+$	0	$-$	
Variation de V	0	$\nearrow$	$\frac{3200\pi}{9}$	$\searrow$	0

$V(8) = \frac{1}{3} 50\pi \left(64 - \frac{512}{12}\right)$

$= \frac{1}{3} 50\pi \left(\frac{192}{3} - \frac{128}{3}\right)$

$= \frac{1}{3} 50\pi \times \frac{64}{3} = \frac{3200\pi}{9}$

$V(12) = \frac{1}{3} 50\pi \underbrace{\left(1 - \frac{12}{12}\right)}_{0} = 0$

$\underline{V \text{ sera maximum pour } r = 8 \text{ cm}}$