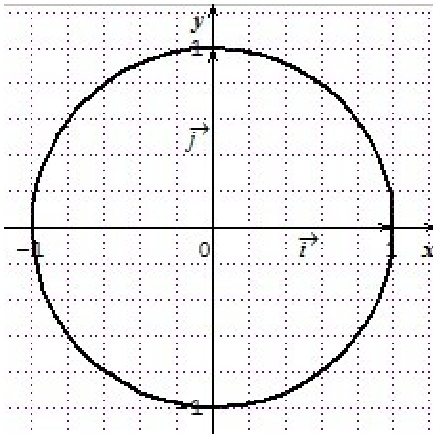
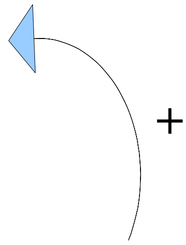
I) Rappels de seconde :

1) Définition d'un cercle trigonométrique

Un cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1 sur lequel on définit un sens de parcours (sens direct)

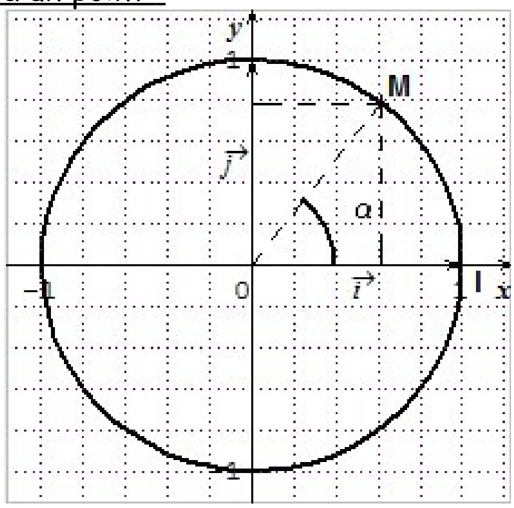




Remarques :

- Le sens direct appelé aussi sens trigonométrique correspond au sens inverse des aiguilles d'une montre.
- Attention à l'attribution des noms des angles avec Geogebra.

2) Angles associés à un point :



α = mesure de l'angle géométrique $\widehat{IOM}$

Périmètre du cercle = 2π (car le rayon = 1)

A chaque point M du cercle, on associe la longueur de l'arc de cercle d'origine I et d'extrémité M.

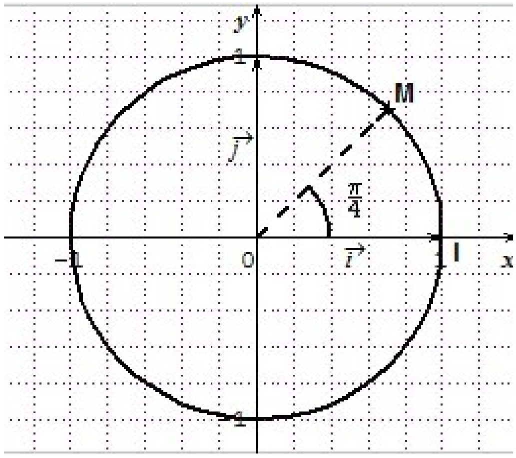
Exemple : Si M a pour coordonnées (- 1;0) alors on peut lui associer le nombre π (= longueur du demi-cercle trigonométrique)

En fait, tous les 2π on revient au même point.

Autrement dit : Si M est associé à un angle α, alors il est également associé à α' tel que :

$$\boxed{\alpha' = \alpha + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}}$$

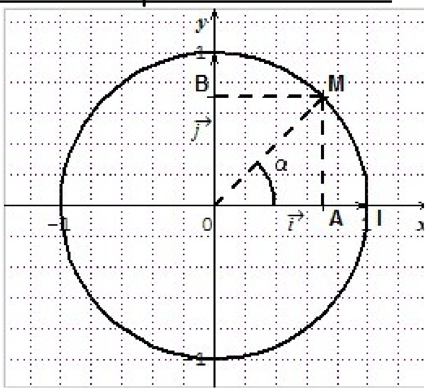
Exemples :



M est aussi associé à $\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4}$, et aussi à $\frac{17\pi}{4}$, et encore à $-\frac{7\pi}{4}$

$(= \frac{\pi}{4} - 2\pi)$

3) Coordonnées de M dans le repère orthonormé



Le triangle MOA est rectangle en A. On a $\cos \alpha = \frac{OA}{OM}$ = OA = Abscisse de M

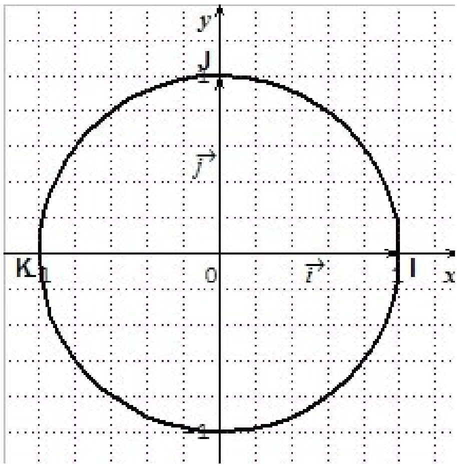
De même, $\sin \alpha = \frac{AM}{OM}$ = AM = Ordonnée de M

Donc M a pour coordonnées ($\cos \alpha$; $\sin \alpha$)

4) Valeurs remarquables :

α	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
Cos α	1	0	-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Sin α	0	1	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Démonstrations :



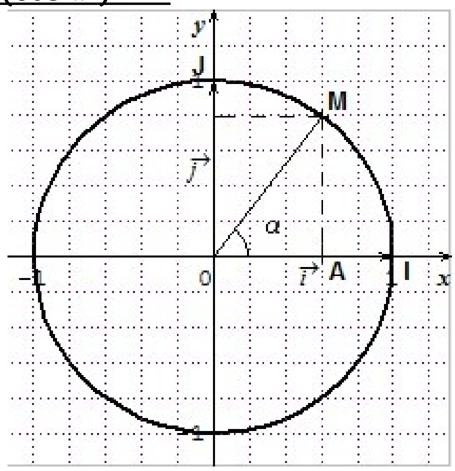
$\cos 0 = x_I = 1$ $\sin 0 = y_I = 0$ $\cos \pi = x_K = -1$ $\sin \pi = y_K = 0$

$\cos \frac{\pi}{2} = x_J = 0$ $\sin \frac{\pi}{2} = y_J = 1$

- Pour les $\cos \frac{\pi}{4}$ et $\sin \frac{\pi}{4}$, se placer dans un triangle rectangle et isocèle

- Pour les cos et sin en $\frac{\pi}{3}$ et en $\frac{\pi}{6}$, se placer dans un triangle équilatéral.

5) Relation $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$



Dans le triangle OMA, rectangle en A, on applique le théorème de Pythagore :

$$OM^2 = OA^2 + AM^2$$

Or, OM = 1 et $OA = x_M = \cos \alpha$ et $AM = y_M = \sin \alpha$

D'où : $(\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 = 1$

Notation : $(\cos \alpha)^2 = \cos^2\alpha$

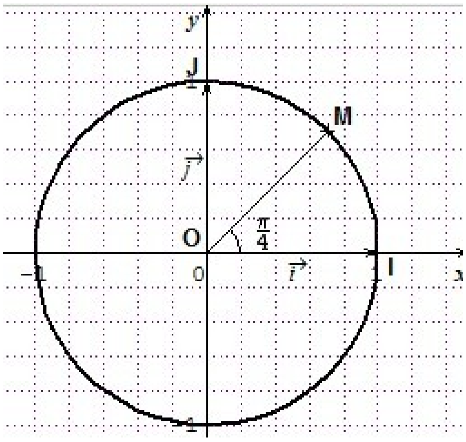
II) Radian : une nouvelle unité d'angle

1) Définition :

Une mesure en radians d'un angle est égale à la longueur de l'arc de cercle que cet angle intercepte sur le cercle trigonométrique.

Conséquence : Un angle a une infinité de valeurs en radians (toutes déterminées à un nombre pair de fois π près)

Exemple :



L'angle $\widehat{IOM}$ a une mesure de $\frac{\pi}{4}$ rad ou bien $\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4}$ rad ou encore : $\frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{7\pi}{4}$ rad, $\frac{\pi}{4} + 4\pi = \frac{17\pi}{4}$ rad , etc...

2) Conversion degrés-radians

Il y a proportionnalité entre les radians et les degrés par la correspondance :

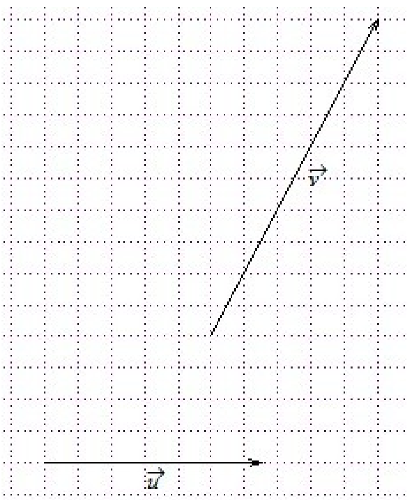
$$\boxed{\pi \text{ rad} = 180°}$$

Exemples :

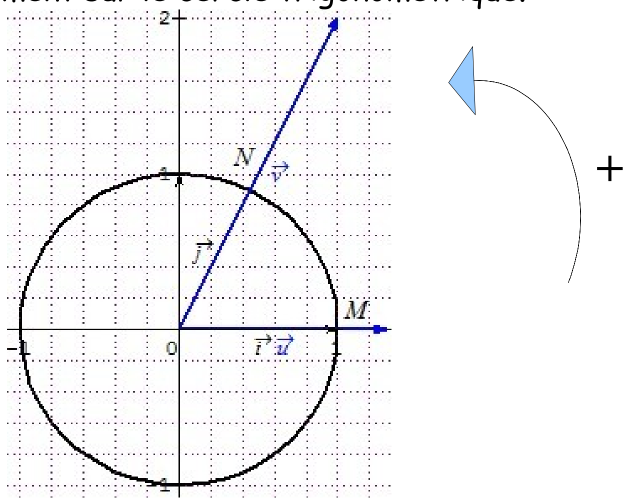
$\frac{\pi}{2}$ rad = 90° $\frac{\pi}{4}$ rad = 45° $\frac{\pi}{3}$ rad = 60° $\frac{\pi}{6}$ = 30°

3) Mesure d'un angle orienté de vecteurs

a) Définition :



On souhaite déterminer l'angle entre les deux vecteurs tenant compte de l'orientation choisie préalablement sur le cercle trigonométrique.



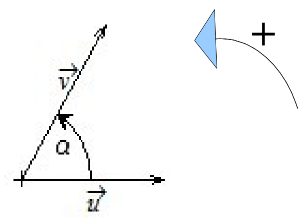
On va définir l'angle orienté des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Au couple formé par $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$, on associe les nombres $\ell + 2k\pi$, où ℓ = longueur de l'arc de cercle d'origine M et d'extrémité N ($\ell \geq 0$) et $k \in \mathbb{Z}$.
Les nombres <u>$\ell + 2k\pi$</u> sont les mesures en radians de l'angle orienté des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
<u>Notation :</u> $(\vec{u}, \vec{v})$

Parmi toutes ces mesures, on va en particulariser une : celle contenue dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$. Elle s'appelle <u>**la mesure principale**</u> de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$

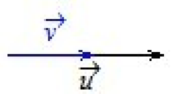
<u>Méthode :</u>
Pour trouver la valeur principale d'un angle orienté de vecteurs, soit la valeur donnée est déjà située dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$, soit elle ne l'est pas et alors on ajoute ou en retranche un multiple entier de 2π.
<u>Exemples:</u>
Mesure principale d'un angle valant $\frac{35\pi}{4}$ (tout d'abord, $\frac{35\pi}{4} \notin]-\pi ; \pi]$)

$$\frac{35\pi}{2} = \frac{36\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 18\pi - \frac{\pi}{2} = 2\pi \times 9 - \frac{\pi}{2}$$

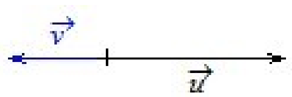
Donc la mesure principale est $-\frac{\pi}{2}$ car $-\frac{\pi}{2} \in]-\pi ; \pi]$
<u>Remarque :</u>
La mesure d'un angle orienté est toujours connue à un nombre pair de fois π près.
<u>Notation :</u>

	$(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha$ modulo $2\pi = \alpha\ (2\pi)$

<u>b) *Cas particuliers et propriétés des angles orientés :*</u>
<u>*1) Angle nul ou plat :*</u>



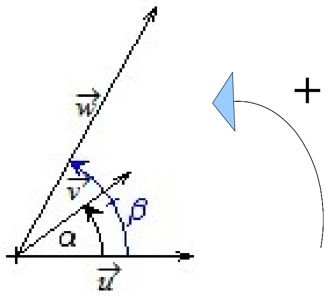
$(\vec{u}, \vec{v}) = 0\ (2\pi)$ (angle nul)



$(\vec{u}, \vec{v}) = \pi\ (2\pi)$ (angle plat)
<u>*2) Vecteurs colinéaires :*</u>

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = 0\ (\pi)$

<u>Rappel :</u> *Des vecteurs colinéaires ont la même direction mais pas forcément le même sens.*
<u>3) Relation de Chasles :</u>



$(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha\ (2\pi)$ et $(\vec{u}, \vec{w}) = \beta\ (2\pi)$

<u>Relation de Chasles :</u>

$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})\ (2\pi)$

<u>*Démonstration (rapide) :*</u>

$(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha\ (2\pi)$ et $(\vec{v}, \vec{w}) = \beta - \alpha\ (2\pi)$

<u>Exemple :</u>

$(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$, $(\vec{v}, \vec{w}) = \dfrac{\pi}{3}\ (2\pi)$ et $(\vec{w}, \vec{t}) = \dfrac{\pi}{6}\ (2\pi)$

Que peut-on dire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{t}$?

D'après la relation de Chasles, $(\vec{u}, \vec{t}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) + (\vec{w}, \vec{t})\ (2\pi)$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\ (2\pi)$$

$$= \pi\ (2\pi)$$

Donc : $\vec{u}$ et $\vec{t}$ sont <u>colinéaires et de sens opposés</u>

<u>4) Propriétés :</u>

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs :

* $(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v})\ (2\pi)$
* $(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})\ (2\pi)$
* $(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi\ (2\pi)$

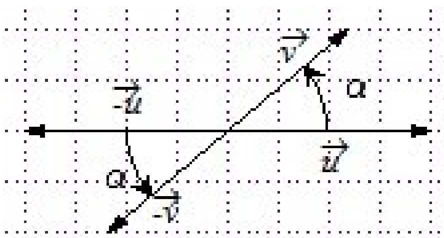
<u>Démonstrations :</u>

* Par la relation de Chasles, $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{u}) = (\vec{u}, \vec{u})\ (2\pi)$

$$= 0\ (2\pi)$$

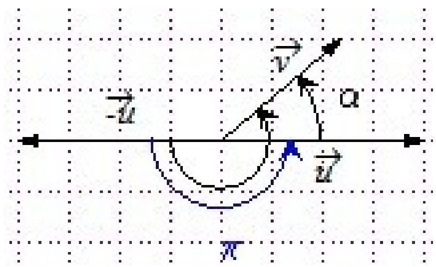
D'où : <u>$(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v})\ (2\pi)$</u>

*



De manière évidente, $(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})\ (2\pi)$

*



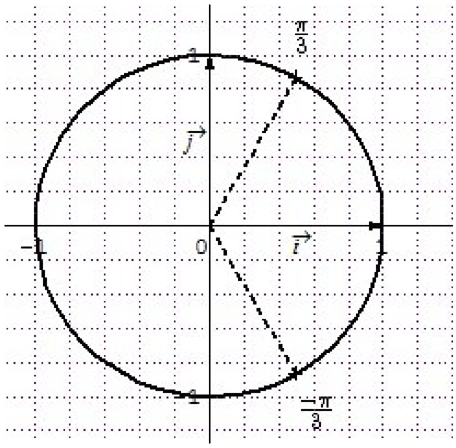
De manière évidente, $(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi\ (2\pi)$

III) <u>Equations trigonométriques</u>

Dans ces équations, on va chercher l'ensemble de toutes les valeurs de l'inconnue qui vérifient une égalité contenant des sinus et des cosinus.

Exemple :

Considérons l'équation $\cos x = \dfrac{1}{2}$

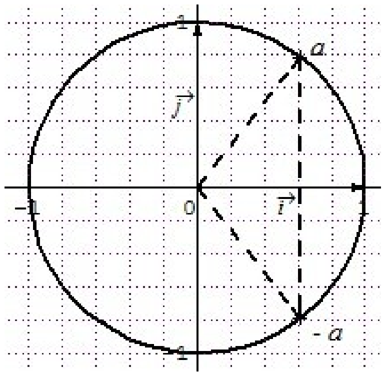


Sur le cercle trigonométrique, deux valeurs vérifient cette équation : $\dfrac{\pi}{3}$ et $-\dfrac{\pi}{3}$

Pour avoir l'ensemble de toutes les solutions, il suffit de considérer ces deux valeurs à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$)

D'où : $S = \{ \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \, , -\dfrac{\pi}{3} + 2k'\pi \, , k,k' \in \mathbb{Z} \}$

1) Equations du type $\cos x = \cos a$



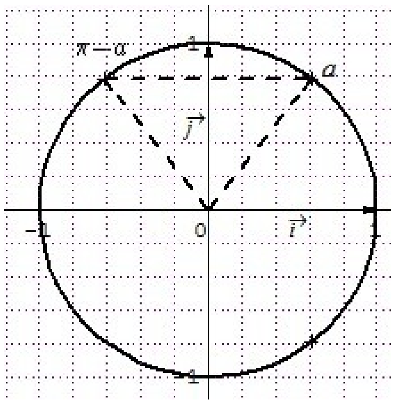
On a cos a = cos (- a)

Les solutions de l'équation $\cos x = \cos a$ sont :

$\{ a + 2k\pi, \; -a + 2k'\pi$ avec k et k' entiers relatifs $\}$

Si on cherche les solutions sur $\mathbb{R}$, il y a une infinité de solutions.
La plupart du temps, la résolution de ce type d'équation se fera sur un intervalle comme par exemple : $]-\pi ; \pi]$ ou $[0 ; 2\pi[$, etc...

2) Equations du type $\sin x = \sin a$



On a sin (π – a) = sin a

Les solutions de l'équation sin x = sin a sont :

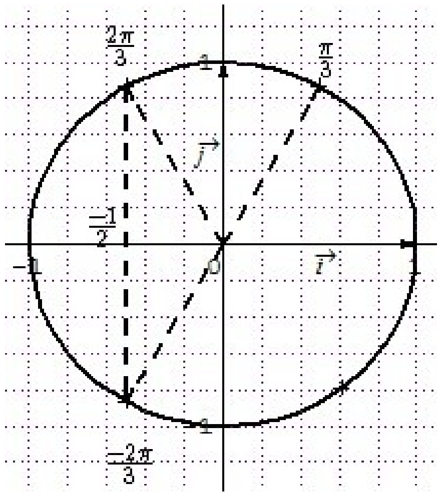
{a + 2kπ, π - a + 2k'π avec k et k' entiers relatifs }

<u>Exemples de résolutions :</u>

1) Résoudre dans [- π ; π [l'équation suivante :

$$\cos x = \cos \frac{2\pi}{3}$$

$\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$

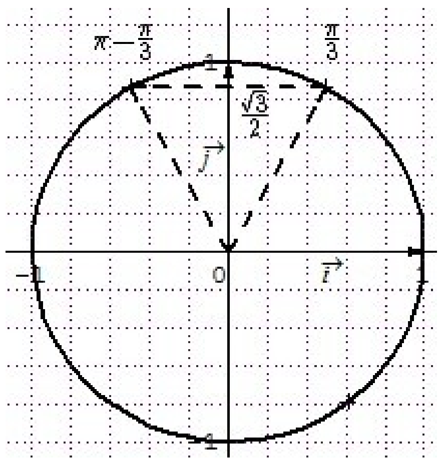


Dans [- π ; π[, il n'y a que deux solutions : $-\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$

Donc : S = {$-\frac{2\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$}

2) Résoudre dans [0;2π[, l'équation : sin x = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

On sait que sin $\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$



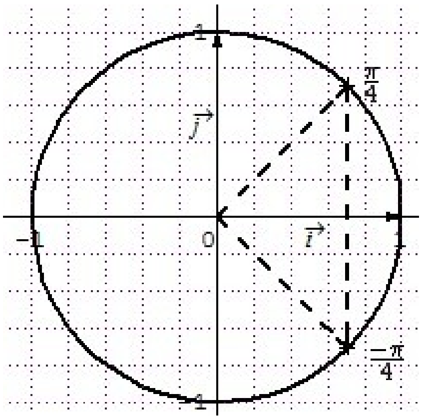
Or, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$ sont dans [0;2π[

Donc S = { $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$ }

Exemple de résolution d'une inéquation trigonométrique :

Résoudre dans]- π ; π] , l'inéquation cos $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

On sait que $\cos \frac{\pi}{4} = \cos (-\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$



Cos $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ pour $x \in]-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}[$ et $]-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}[\subset]-\pi ; \pi]$

$$\boxed{\text{Donc } S =]-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}[}$$