Première S	**Vecteurs/ Colinéarité/Equations cartésiennes de droites**	Année scolaire 2012/2013

I) Rappels de seconde sur les vecteurs colinéaires :

1) Définition :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **colinéaires** si et seulement si il existe un nombre réel $k \neq 0$ tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$

2) Théorème :

Si dans un repère du plan, $(x\,;y)$ et $(x'\,;y')$ sont les coordonnées respectives de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow xy' = yx'$$

Exemple :

Soient A(4;-1) , B(3;0) et C(2;1) dans un repère du plan.

$\overrightarrow{AB}$ $(x_B-x_A\,;\,y_B-y_A)$ D'où : $\overrightarrow{AB}$ (-1 ; 1)

AC $(x_C-x_A\,;\,y_C-y_A)$ D'où : $\overrightarrow{AC}$ (-2 ; 2)

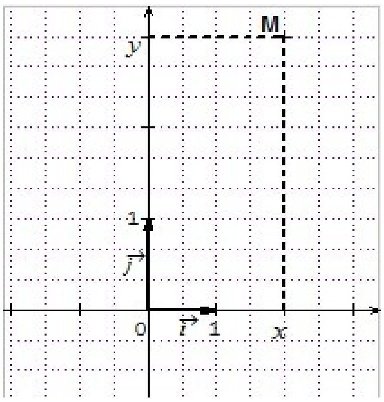
$x_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{AC}} = -1 \times 2 = \underline{-2}$ $\quad$ $x_{\overrightarrow{AC}} \times y_{\overrightarrow{AB}} = -1 \times 2 = \underline{-2}$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Remarque : Comme ces deux vecteurs ont un point commun, alors A, B et C sont alignés.

II) Expression d'un vecteur :

1) Repères du plan :



Soit M$(x\,;y)$ dans le repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) , repère orthogonal du plan :

Alors : $\overrightarrow{OM}$ $(x\,;y)$ et $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$

2) Expression d'un vecteur en fonction de deux vecteurs non-colinéaires :

Théorème :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs non-colinéaires du plan. Alors, tout vecteur $\vec{w}$ s'écrit de **manière unique** sous la forme $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ où a et b sont deux nombres réels.

On dit que (a;b) sont les coordonnées du vecteur $\vec{w}$ dans la base ($\vec{u}$; $\vec{v}$)

Quand on nomme les vecteurs avec leur origine et leur extrémité, on obtient l'énoncé suivant :

Théorème :

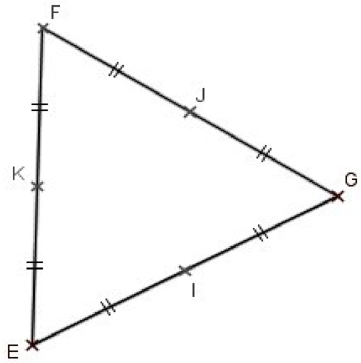
On considère trois points non-alignés A, B et C *(= ce qui signifie que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non-colinéaires).*
Alors : Tout point M du plan vérifie : $\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$ où x et y sont deux nombres réels uniques.

$(x;y)$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$ dans le repère d'origine A et de base ($\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$)

Ce repère se note (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$)

Exemple :

On considère un triangle équilatéral EFG.
I , J et K sont les milieux respectifs des côtés [EG], [FG] et [EF].



$\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont deux vecteurs non-colinéaires.
On peut donc se placer dans le repère (E ; $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{EF}$)

On a $\overrightarrow{EI} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{EG} + 0\,\overrightarrow{EF}$ d'où I a pour coordonnées ($\frac{1}{2}$; 0) dans ce repère.

De même : $\overrightarrow{EK} = 0\,\overrightarrow{EG} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{EF}$ d'où K a pour coordonnées (0 ; $\frac{1}{2}$) dans ce repère.

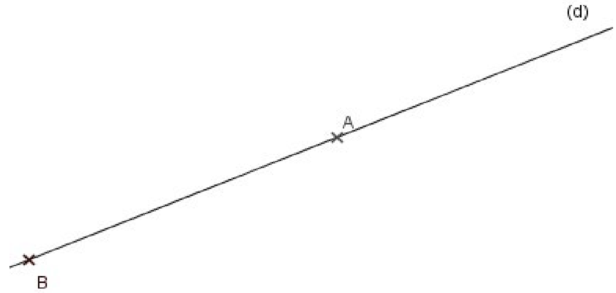
$\overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{EI} + \overrightarrow{EK} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{EG} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{EF}$ d'où : J a pour coordonnées ($\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$) dans ce repère.

Remarque : Attention à bien respecter l'ordre des vecteurs de la base pour pouvoir obtenir les coordonnées du point demandé.

III) Equations cartésiennes de droites :

Cartésien : adjectif venant de René Descartes (1596-1650) : philosophe et mathématicien français.

1) Vecteur directeur d'une droite :



Soient A et B, deux points distincts de la droite (d) :
On dit qu'un vecteur $\vec{u}$ non-nul est un vecteur directeur de la droite (d) si et seulement si $\vec{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$

Remarque : Une droite donnée a une infinité de vecteurs directeurs.

2) Droites parallèles :

Soient (d) et (d') deux droites ayant pour vecteurs directeurs respectifs : $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors :

(d) // (d') $\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

3) Equation cartésienne :

On considère une droite (d) et M un point de (d).
Soient (x ;y) les coordonnées du point M dans un repère du plan.

M(x ; y) $\in$ (d) $\Leftrightarrow$ il existe des coefficients a,b et c tels que (a,b) $\neq$ (0,0) et $ax + by + c = 0$

On dit que $ax + by + c = 0$ est **<u>une équation cartésienne</u>** de la droite (d)

Remarque :
Une droite donnée admet une infinité d'équations cartésiennes.
En effet : si $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne d'une droite (d), alors en multipliant cette égalité par un coefficient $\lambda \neq 0$, alors on obtient :

$$\lambda ax + \lambda by + \lambda c = \lambda \times 0 = 0$$

qui est une autre équation cartésienne de la droite (d).

4) Lien équation cartésienne d'une droite/ Vecteur directeur :

Soit (d) : $ax + by + c = 0$, alors $\vec{u}$ (- b ; a) est un vecteur directeur de (d)

Exemple :
Soit (d) : $3x - 2y + 7 = 0$, alors $\vec{u}$ (2;3) est un vecteur directeur de (d)

Application :
Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) ayant pour vecteur directeur $\vec{u}$ (5 ; - 1) et passant par le point M de coordonnées (- 4; 1)

Si on note $ax + by + c = 0$ une équation cartésienne de la droite (d), alors on peut poser :
- b = 5 et a = - 1 car $\vec{u}$ (5 ; - 1) vecteur directeur de (d)
D'où : (d) : $-x - 5y + c = 0$
Or, M $\in$ (d) , d'où : $-(-4) - 5\times1 + c = 0$
Donc : c = 1
C'est-à-dire : <u>$-x - 5y + 1 = 0$ est une équation cartésienne de la droite (d)</u>

5) Cas des droites parallèles :

Soit (d) : $ax + by + c = 0$ (avec (a ;b) $\neq$ (0 ;0))
et (d') : $a'x + b'y + c' = 0$ (avec (a' ;b') $\neq$ (0 ;0))

$\vec{u}$, vecteur directeur de (d) : $\vec{u}$ (- b;a)
$\overrightarrow{u'}$, vecteur directeur de (d') : $\overrightarrow{u'}$ (-b';a')

$$
\begin{aligned}
&(d) \,//\, (d') \\
&\Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \overrightarrow{u'} \text{ sont colinéaires} \\
&\Leftrightarrow -ba' = -b'a \\
&\Leftrightarrow ab' = a'b \\
&\Leftrightarrow \text{Les coordonnées de } \vec{u} \text{ sont proportionnelles à celles de } \overrightarrow{u'}
\end{aligned}
$$

Ces équivalences se démontrent très facilement.

<u>Exemple d'application :</u>

Soit (d) : $3x + 2y - 1 = 0$ et le point A(-2;3)

Déterminer une équation cartésienne de la droite (d') parallèle à (d) et qui passe par A.

Soit $\vec{u}$ vecteur directeur de (d) :

$\vec{u}$ (- b;a) d'où : $\vec{u}$ (-2 ; 3)

Comme (d) // (d'), alors $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de (d') :

D'où : (d') : $3x + 2y + c = 0$

Or, $A \in (d')$, d'où : $3\times(-2) + 2\times 3 + c = 0$

Alors : $c = 0$

Par conséquent : <u>(d') : $3x + 2y = 0$</u>