

1ère S

Exercices supplémentaires (2)

(1)

Exercice (34):

$n \in \mathbb{N}^*$

$$P(X=1) = \frac{1}{2} \quad - \quad P(X=2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad - \quad P(X=3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad - \quad - \quad - \quad P(X=n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$P(X=n+1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

ces probabilités sont des termes d'une suite géométrique de 1^{er} terme $\frac{1}{2}$, de raison $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{On a: } \sum_{i=1}^{n+1} P(X=x_i) &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 1 \end{aligned}$$

2) a) Dans ce programme, l'utilisateur donne la valeur de n .

Ensuite, le programme calcule $\sum_{i=1}^{n+1} x_i P(X=x_i)$ c'est-à-dire $E(X)$

b) Algorithme:

Variables
 n, x, S, R, p
Début
Saisir n
 $x \leftarrow 0$
 $p \leftarrow 1$
 $S \leftarrow 0$
Pour $R = 1$ à n
Faire
Début Pour
 $x \leftarrow x + 1$
 $p \leftarrow p \times 0,5$
 $S \leftarrow S + x \times p$
Fin Pour
 $S \leftarrow S + (n+1) \times p$
Afficher S
Fin

3a) Sur AlgoBox

b) On trouve $E(X) = 2$ pour $n = 40$

4) a) On donne sigma en variable et V (Variance)
Après la ligne Afficher S, écrire: S

$x \leftarrow 0$

$p \leftarrow 1$

$V \leftarrow 0$

Pour $R = 1$ à n

Faire

Début Pour

$x \leftarrow x + 1$

$p \leftarrow p \times 0,5$

$V \leftarrow p \times (x - S)^2$

Fin Pour

$V \leftarrow V + p \times ((n+1) - S)^2$

Sigma $\leftarrow \text{sqrt}(V)$

Afficher Sigma

Fin

(sqrt: racine carrée)

b) $S(x) \approx 5,19 \times 10^{-5}$ pour $n = 40$

5) Quand n devient très grand

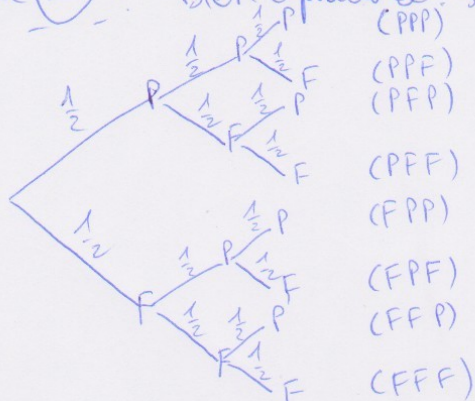
$E(X) = 2$ et

$V(X)$ s'approche de zéro

Exercice (35): Bien équilibrée: situation d'équiprobabilité

(2)

1) a)



b) $\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$

On peut poser X : variable aléatoire réelle $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (Pile: +1€, Face: -1€)

Values possibles:
Donc $X(\Omega) = \{3; 1; -1; -3\}$

Loi de probabilité:

x_i	3	1	-1	-3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$P(X=3) = P(\{PPP\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

$P(X=1) = P(\{PPF\}) + P(\{PFP\}) + P(\{FPP\})$
 $= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 3 = \frac{3}{8}$

On a bien $P(X=3) + P(X=1) + P(X=-1) + P(X=-3)$
 $= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$

$P(X=-1) = P(\{PFF\}) + P(\{FPF\}) + P(\{FFP\})$
 $= \frac{3}{8}$

$P(X=-3) = P(\{FFF\})$
 $= \frac{1}{8}$

2) E_0 : "Obtenir 0 fois PILE": $P(E_0) = P(\{FFF\}) = \frac{1}{8}$

E_1 : " - 1 fois " : $P(E_1) = \frac{3}{8}$

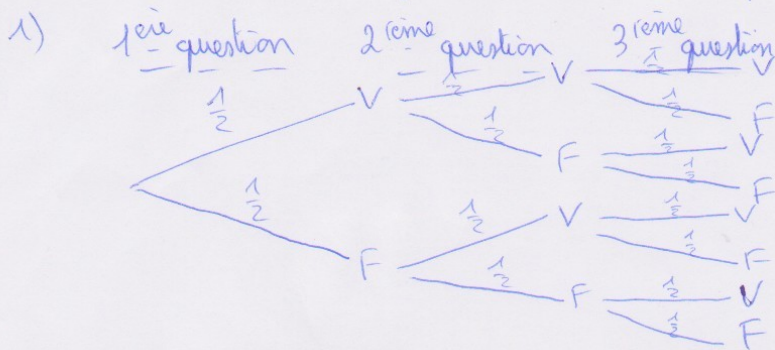
E_2 : "Obtenir 2 fois PILE"
 $P(E_2) = \frac{3}{8}$

E_3 : "Obtenir 3 fois PILE": $P(E_3) = \frac{1}{8}$

On a: $P(E_0) + P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$

3) A_1 : "Avoir au moins 1 PILE": $P(A_1) = \frac{7}{8}$ | A_2 : "Avoir au plus 1 Face"
 $P(A_2) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Ex (38): Le candidat répond au hasard: Expérience aléatoire.



X : variable aléatoire réelle

(3)

$\Omega = \{VVV; VVF; VFF; FVV; FVF; FFV; FFF\}$

$X(\Omega) = \{6; 3; 0; -3\}$ D'où la loi de probabilité de X :

x_i	6	3	0	-3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$P(X=6) = P(\{VVV\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{8}\right)$$

$$P(X=3) = P(\{VVF\}) + P(\{VFF\}) + P(\{FVV\})$$

$$= \left[\frac{3}{8}\right]$$

$$P(X=0) = P(\{VFF\}) + P(\{FVF\}) + P(\{FFV\})$$

$$= \left[\frac{3}{8}\right] \quad P(X=-3) = P(\{FFF\}) = \frac{1}{8}$$

$$2) E(X) = 6 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{3}{8} + 0 \times \frac{3}{8} + (-3) \times \frac{1}{8}$$

$$= \frac{15}{8} - \frac{3}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3 \times 4}{2 \times 4} = \left[\frac{3}{2}\right]$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

$$\left[\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$\text{avec } V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + p_3(x_3 - E(X))^2 + p_4(x_4 - E(X))^2$$

$$= \frac{1}{8} \left(6 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{8} \left(3 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{8} \left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{8} \left(-3 - \frac{3}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{8} \left(\frac{81}{4}\right) + \frac{3}{8} \left(\frac{9}{4}\right) + \frac{3}{8} \times \frac{9}{4} + \frac{1}{8} \left(\frac{81}{4}\right)$$

$$= \frac{81}{16} + \frac{27}{16} = \frac{108}{16} = \frac{54}{8} = \frac{27}{4}$$

$$\text{D'où } \sigma(X) = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{\sqrt{9 \times 3}}{2} = \left[\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$$

Exercice (40):

1) a) On a X : variable aléatoire réelle donnant le gain algébrique du jeu à l'issue d'un lancer.

$X(\Omega) = \{11; 3; -2\}$ (car il y a 3 cas possibles: $\rightarrow 13 \text{ €} - 2 \text{ €} = 11 \text{ €}$
 $\rightarrow 5 \text{ €} - 2 \text{ €} = 3 \text{ €}$
 $\rightarrow 0 \text{ €} - 2 \text{ €} = -2 \text{ €}$)

$$P(X=11) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \quad \text{et} \quad P(X=-2) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$

D'où $P(X=3) = 1 - \left(\frac{1}{36} + \frac{25}{36}\right) = \frac{10}{36}$ D'où la loi de probabilité de X

x_i	11	3	-2
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{25}{36}$

$$b) E(X) = 11 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{10}{36} + (-2) \times \frac{25}{36} = \frac{11}{36} + \frac{30}{36} - \frac{50}{36} = -\frac{9}{36} = \boxed{-\frac{1}{4}} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} V(X) &= \frac{1}{36} \times \left(11 + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{10}{36} \times \left(3 + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{25}{36} \times \left(-2 + \frac{1}{4}\right)^2 \\ &= \frac{1}{36} \times \left(\frac{45}{4}\right)^2 + \frac{10}{36} \times \left(\frac{13}{4}\right)^2 + \frac{25}{36} \times \left(-\frac{7}{4}\right)^2 \\ &= \frac{1235}{144} \quad \text{Or, } \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1235}{144}} = \sqrt{\frac{1235}{12}} \approx 2,9 \end{aligned}$$

c) $E(X) < 0$: ce jeu est défavorable. Il est équitable quand $E(X) = 0$

Notons m la mise du jeu. On a $E(X) = (13-m) \times \frac{1}{36} + (5-m) \times \frac{10}{36} + (-m) \times \frac{25}{36}$

$$E(X) = 0 \Leftrightarrow \frac{13}{36} - \frac{1}{36}m + \frac{50}{36} - \frac{10}{36}m - \frac{25}{36}m = 0$$

$$\Leftrightarrow -m = -\frac{63}{36} \Leftrightarrow m = \frac{8 \times 7}{8 \times 4} = \frac{7}{4} = 1,75$$

Si on fixe la mise à 1,75 €, le jeu sera équitable.

2) Mise : 1 € - Gains $\rightarrow 12$ € (numéros sur les 2 dés)
 $\rightarrow 4$ € (numéro sur 1 seul dé)

$$Y(\Omega) = \{11; 3; -1\}$$

y_i	11	3	-1
$P(Y=y_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{25}{36}$

$$\begin{aligned} E(Y) &= \frac{11}{36} + \frac{30}{36} - \frac{25}{36} \\ &= \frac{16}{36} = \frac{4 \times 4}{4 \times 9} = \frac{4}{9} > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(Y) &= \frac{1}{36} \times \left(11 - \frac{4}{9}\right)^2 + \frac{10}{36} \times \left(3 - \frac{4}{9}\right)^2 + \frac{25}{36} \times \left(-1 - \frac{4}{9}\right)^2 \\ &= \frac{1}{36} \times \left(\frac{95}{9}\right)^2 + \frac{10}{36} \times \left(\frac{23}{9}\right)^2 + \frac{25}{36} \times \left(-\frac{13}{9}\right)^2 = \frac{515}{81} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \sigma(Y) = \sqrt{\frac{515}{81}} = \sqrt{\frac{515}{9}}$$

b) Comme $E(Y) > 0$, le jeu est favorable, d'où les reticences de l'organisateur.

3) Mise : 4 € - Gains $\rightarrow 26$ € (numéros sur les 2 dés)
 $\rightarrow 10$ € (numéro sur 1 seul dé)

$$a) Z(\Omega) = \{22; 6; -4\}$$

z_i	22	6	-4
$P(Z=z_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{25}{36}$

$$\text{Donc } E(z) = \frac{22}{36} + \frac{60}{36} - \frac{100}{36} = -\frac{18}{36} = -\frac{1}{2} < 0$$

(5)

$$\begin{aligned} V(z) &= \frac{1}{36} \times \left(22 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{10}{36} \times \left(6 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{36} \times \left(-4 + \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{36} \times \left(\frac{45}{2}\right)^2 + \frac{10}{36} \times \left(\frac{13}{2}\right)^2 + \frac{25}{36} \times \left(-\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{1235}{36} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \sigma(z) = \sqrt{V(z)} = \frac{\sqrt{1235}}{6} \approx 5,86.$$

b) On $E(x) = -\frac{1}{4}$ $E(y) = \frac{4}{9}$ $E(z) = -\frac{1}{2}$

Selon le gain moyen du joueur, la meilleure stratégie pour lui est la 2^{ème} puis la 1^{ère} et enfin la 3^{ème}.