1ère S

Exercices supplémentaires 1

Exercice 21 :

$d(t) = t^2 + 5t$

1) a) $\dfrac{d(h)-d(0)}{h} = \dfrac{h^2+5h}{h} = h+5$

b) $d'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{d(h)-d(0)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} h+5 = 5$

Au temps $t=0$, la vitesse est de 5m/s

2) Vitesse instantanée à $t = 10s$:

$\dfrac{d(h+10)-d(10)}{h} = \dfrac{(h+10)^2+5(h+10)-100-50}{h}$

$= \dfrac{h^2+20h+\cancel{100}+5h+\cancel{50}-\cancel{50}-\cancel{100}}{h} = \dfrac{\cancel{h}(h+25)}{\cancel{h}} = h+25$

$d'(10) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{d(h+10)-d(10)}{h} = \lim\limits_{h \to 0}(h+25) = 25$ (A $t = 10s$, la vitesse est de 25m/s).

Exercice 22 : $f : x \longmapsto 2x-3$

1) $a = 1$: $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2(1+h)\cancel{-3}-2\cancel{+3}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2h}{h}$

$= \boxed{2}$

$a = 3$: $f'(3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2(3+h)\cancel{-3}-2\times3\cancel{+3}}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2h}{h} = \boxed{2}$

$a = -6$: $f'(-6) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-6+h)-f(-6)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2(-6+h)\cancel{-3}-2\times(-6)\cancel{+3}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2h}{h}$

$= \boxed{2}$

2) On conjecture que le nombre dérivé ~~est~~ semble toujours égal à 2 c'est-à-dire le coefficient directeur de la droite représentant f.

3) Soit $a \in \mathbb{R}$: $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{2(a+h)\cancel{-3}-2a\cancel{+3}}{h} = \dfrac{2h}{h} = 2$

Donc : $f'(a) = 2$, pour tout $a \in \mathbb{R}$

Exercice 23 :

a) $f : x \longmapsto x$. Soit $a \in \mathbb{R}$: $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{\cancel{a}+h\cancel{-a}}{h} = 1$

D'où $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \boxed{1 = f'(a)}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. (2)

b) $f : x \mapsto x^2$. $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \dfrac{\cancel{a^2}+2ah+h^2-\cancel{a^2}}{h}$

$= \dfrac{\cancel{h}(2a+h)}{\cancel{h}} = 2a+h$.

Or, $\lim\limits_{h \to 0} 2a+h = 2a$ Donc : $f'(a) = 2a$, pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 24 : 1) $(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3 + \cancel{x^2y} + \cancel{xy^2} - \cancel{yx^2} - \cancel{xy^2} - y^3$

$= x^3 - y^3$ (pour tout x, y réels).

2) a) $(2+h)^3 - 8 = (2+h)^3 - 2^3 \underset{\text{(en appliquant l'égalité précédente)}}{=} (2+h-2)((2+h)^2 + (2+h)\times 2 + 2^2)$

$= h(4+h^2+4h+4+2h+4)$

$= h(h^2+6h+12)$

b) $f'(2) = ?$ $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \dfrac{(2+h)^3 - 2^3}{h} = h^2+6h+12$

Or, $\lim\limits_{h \to 0}(h^2+6h+12) = 12 = f'(2)$.

Exercice 25 p89

1) $f'(3)$: c'est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 3.

b) Pour déterminer graphiquement $f'(3)$, il suffit de déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f en D. $f'(3) = \dfrac{3}{1} = \boxed{3}$

(quand on "avance" de une unité en abscisse, on "monte" de 3 unités en ordonnée)

2) $f'(-5)$: coefficient directeur de la tangente à la courbe de f en A

$f'(-5) = \dfrac{4}{1} = \boxed{4}$. $f'(-3) = \boxed{0}$ (tangente horizontale)

$f'(0) = \dfrac{1}{-1} = \boxed{-1}$

Exercice 31 : $f : x \longmapsto x^2$ $(\mathcal{P})$: sa courbe.

1) $f'(2) = 4$ – $(T_A) : y = f'(2)(x-2) + f(2)$
$= 4(x-2) + 2^2$

$(T_A) : y = 4x - 8 + 4 = 4x - 4$

Rappel : Si $A(a ; f(a)) \in \mathcal{P}$, $(T_A) : y = f'(a)(x-a) + f(a)$

(à bien connaître)

Ex 33 : $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ $(\mathcal{C})$ sa courbe.

1) $f'(4) = \frac{1}{4}$ – $A(4 ; f(4))$ – $A(4 ; 2)$ car $\sqrt{4} = 2$

$(T_A) : y = f'(4)(x-4) + f(4) = \frac{1}{4}(x-4) + 2 = \frac{1}{4}x + 1$

Exercice 35 : La fonction représentée à gauche n'est pas dérivable en 3 car sa courbe représentative possède un "pic" en ce point.

Exercice 38 . a) $f(x) = x^2$ – $a = -5$ – $f'(x) = 2x$
d'où $f'(-5) = 2 \times (-5) = -10$

b) $f(x) = x^3$ – $f'(x) = 3x^2$ (car dérivée de $x^n = nx^{n-1}$)
d'où $f'(2) = 3 \times 2^2 = \boxed{12}$

c) $f(x) = \sqrt{x}$ – $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ d'où $f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \boxed{\frac{1}{4}}$

d) $f(x) = \frac{1}{x}$ – $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ d'où $f'(3) = -\frac{1}{3^2} = \boxed{-\frac{1}{9}}$

Exercice 39 :

a) $\mathcal{C} : y = x^2$ – $a = 2$. $(T_a) : y = f'(2)(x-2) + f(2)$
$= 2 \times 2\,(x-2) + 4 = 4(x-2) + 4$

$\boxed{(T_2) : y = 4x - 4}$

c) $\mathcal{C} : y = \frac{1}{x}$ – $a = 3$ –

$(T_3) : y = f'(3)(x-3) + f(3) = -\frac{1}{9}(x-3) + \frac{1}{3}$

$\boxed{y = -\frac{1}{9}x + \frac{2}{3}}$