

(1)

Exercice (1)

- 1) $f(x) = -x^2 - x + 2$ - Le coefficient devant x^2 est $-1 < 0$
Donc la parabole représentant f est orientée vers le bas - (la b) n'est pas possible)
Calcul de l'abscisse du sommet de la parabole: $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{-2} < 0$

Donc: la courbe représentative de f est celle de la c)

- 2) $\frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - 5x - 3} \geq 0$ $\frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - 5x - 3}$ existe si et seulement si $2x^2 - 5x - 3 \neq 0$

On calcule les éventuelles racines de ce trinôme

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 + 24 = 49 > 0 \text{ donc le trinôme a deux racines.}$$

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{49}}{4} = \frac{5 + 7}{4} = 3 \text{ et } x_2 = \frac{5 - \sqrt{49}}{4} = \frac{5 - 7}{4} = -\frac{1}{2}$$

Les valeurs interdites sont 3 et $-\frac{1}{2}$.

Le trinôme est du signe de a (donc positif ici) à l'extérieur des racines
c'est-à-dire sur $]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]3; +\infty[$

De plus: $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0$
pour tout $x \in \mathbb{R}$

Donc $\frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - 5x - 3} \geq 0$.

pour $x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]3; +\infty[$
(réponse b))

3) $R(x) = 3x^2 - 5x - 4$

x est un antécédent de -5 par $R \Leftrightarrow R(x) = -5$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 5x - 4 = -5$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4a = 25 - 12 = 13 > 0 \text{ d'où le trinôme a deux racines}$$

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{13}}{6} \text{ et } x_2 = \frac{5 - \sqrt{13}}{6}$$

Donc: -5 a deux antécédents par $R = \left\{ \frac{5 + \sqrt{13}}{6}; \frac{5 - \sqrt{13}}{6} \right\}$

4) $|4x - 3| = |2x + 1| \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3 = 2x + 1 \\ \text{ou } 4x - 3 = -2x - 1 \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} 2x = 4 \\ 6x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$
Donc $S = \left\{ 2, \frac{1}{3} \right\}$ (réponse a))

$$5) \quad g(x) = \sqrt{\frac{5x-1}{2x+4}}$$

g est définie si et seulement si $\frac{5x-1}{2x+4} \geq 0$

(2)

or, $\frac{5x-1}{2x+4}$ existe si et seulement si $2x+4 \neq 0$

$$\text{or, } 2x+4=0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{4}{2} = -2 \text{ (valeur interdite)}$$

$$\text{or a: } 5x-1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{5}$$

$$2x+4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq -2$$

d'où le tableau de signes suivant:

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{5}$	$+\infty$
$5x-1$	-	-	0	+
$2x+4$	-	0	+	+
$\frac{5x-1}{2x+4}$	+	-	0	+

$$\text{Donc: } D_g =]-\infty; -2[\cup [\frac{1}{5}; +\infty[$$

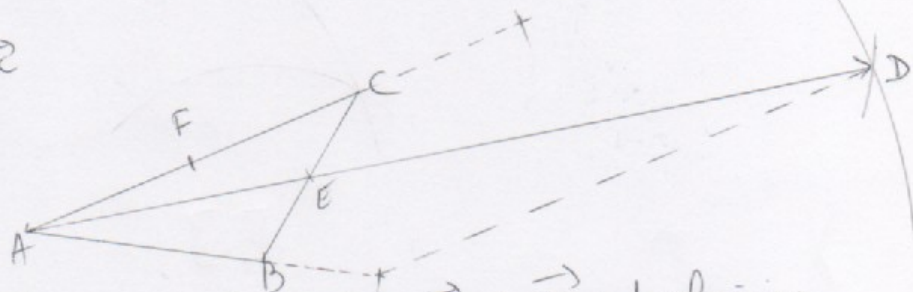
(réponse b))

Exercice 2:

$$\vec{AD} = \frac{3}{2}\vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{AC}$$

$$\vec{BE} = -\frac{1}{2}\vec{CB}$$

F milieu de $[AC]$



2) a)

$$\vec{AB} = \vec{AF} + \vec{FE} + \vec{EB} \text{ (relation de Chasles)}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{AC} + \vec{FE} + \frac{1}{2}\vec{CB}$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{CB}) + \vec{FE}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{FE}$$

$$\text{d'où } \frac{1}{2}\vec{AB} = \vec{FE} \text{ donc } \vec{AB} = 2\vec{FE}$$

b) $\vec{AB}$ et $\vec{FE}$ sont colinéaires
d'où $(AB) \parallel (FE)$

3) a)

$$\vec{BE} = -\frac{1}{2}\vec{CB}$$

$$\Leftrightarrow \vec{BA} + \vec{AE} = -\frac{1}{2}(\vec{CA} + \vec{AB}) \text{ (relation de Chasles)}$$

$$\Leftrightarrow \vec{AE} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$$

b) $\vec{AD} = \frac{3}{2}\vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{AC} = 3\vec{AE}$ donc $\vec{AD}$ et $\vec{AE}$ sont colinéaires
d'autre part, A est un point commun } donc A, D, E sont alignés

4) Dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$:

(Remarque: $\vec{AB}, \vec{AC}$ ne sont pas colinéaires - on peut donc considérer le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$)

a) $A(0;0)$ car A est l'origine du repère.

$$\text{on a } \vec{AB} = 1\vec{AB} + 0\vec{AC} \text{ d'où } B(1;0) - \vec{AC} = 0\vec{AB} + 1\vec{AC} \text{ d'où } C(0;1)$$

$$\vec{AD} = \frac{3}{2}\vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{AC} \text{ d'où } D(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}) - \vec{AE} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} \text{ d'où } E(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$$

On a $\vec{AF} = \frac{1}{2} \vec{AC} = \vec{OA} + \frac{1}{2} \vec{AC}$
 donc $F(0; \frac{1}{2})$

(3)

b) $\vec{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A) = \vec{AB}(1; 0)$
 $\vec{EF}(x_F - x_E; y_F - y_E) = \vec{EF}(-\frac{1}{2}; 0)$

On a $\vec{EF} = -\frac{1}{2} \vec{AB}$ c'est-à-dire: $\vec{EF}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires
 d'où $(EF) \parallel (AB)$

c) Dans la 4a), on a vu que $\vec{AD} = \frac{3}{2} \vec{AB} + \frac{3}{2} \vec{AC}$ et $\vec{AE} = \frac{1}{2} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AC}$

D'où: $\vec{AD} = 3\vec{AE}$ donc $\vec{AD}$ et $\vec{AE}$ sont colinéaires
 de plus, ils ont un point commun } A, D, E alignés

5) a) $ABGC$ parallélogramme $\Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{CG}$

On pose $(x_G; y_G)$ les coordonnées du point G.

$\vec{AB}(1; 0)$ $\vec{CG}(x_G - x_C; y_G - y_C)$ d'où $\vec{CG}(x_G; y_G - 1)$

Or, $\vec{AB} = \vec{CG} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = x_G \\ 0 = y_G - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = 1 \\ y_G = 1 \end{cases}$

Donc $G(1; 1)$

b) $\vec{AD}$ est un vecteur directeur de la droite (AD):

$\vec{AD}(\frac{3}{2}; \frac{3}{2})$ d'où (AD): $\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y + c = 0$

Or $A(0,0) \in (AD)$ d'où: $c = 0$

Donc: (AD): $\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y = 0$

c) On a vu dans la question 5a) que $G(1; 1)$

Or, $\frac{3}{2} \times 1 - \frac{3}{2} \times 1 = 0$ donc $G \in (AD)$

Exercice (3)

$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4 \end{cases}$

1) $u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 4 = \frac{1}{3}(-2) + 4 = -\frac{2}{3} + 4 = \frac{10}{3}$

$$u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{10}{3} + 4 = \frac{10}{9} + 4 = \frac{10}{9} + \frac{36}{9} = \frac{46}{9}$$

$$u_3 = \frac{1}{3}u_2 + 4 = \frac{1}{3} \times \frac{46}{9} + 4 = \frac{46}{27} + \frac{8}{27} = \frac{54}{27} = 2$$

$$2) u_1 - u_0 = \frac{10}{3} - (-2) = \frac{10}{3} + \frac{6}{3} = \frac{16}{3} \quad \left| \quad u_2 - u_1 = \frac{46}{9} - \frac{10}{3} = \frac{46}{9} - \frac{30}{9} = \frac{16}{9} \right.$$

On a $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc (u_n) n'est pas arithmétique

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{\frac{10}{3}}{-2} = \frac{10}{3} \times \frac{1}{-2} = -\frac{5}{3} \quad \left| \quad \frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{46}{9}}{\frac{10}{3}} = \frac{46}{9} \times \frac{3}{10} = \frac{46 \times 3}{9 \times 10} = \frac{23}{15}$$

On a $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ donc (u_n) n'est pas géométrique.

$$3) v_n = u_n - 6$$

$$a) v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{3}u_n + 4 - 6 = \frac{1}{3}u_n - 2 = \frac{1}{3}(u_n - 6) = \frac{1}{3}v_n$$

D'où $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$ (c'est-à-dire (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$)

$$\text{de 1^{er} terme } v_0 = u_0 - 6 = -2 - 6 = -8$$

$$b) \text{ Comme } (v_n) \text{ est géométrique : } v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = -8 \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$c) \text{ Comme } v_n = u_n - 6 \text{ alors } u_n = v_n + 6 = -8 \left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$$

$$d) S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} \quad (\text{Somme des } n+1 \text{ premiers termes d'une suite géométrique})$$

$$= -8 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} = -8 \times \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$\text{Donc : } S_n = -12 \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$5) T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (v_0 + 6) + (v_1 + 6) + \dots + (v_n + 6)$$

$$T_n = S_n + (n+1) \times 6 = -12 \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + (n+1) \times 6$$

Exercice n°4:

(5)

I) $f(x) = 2x^2 + 9x - 5$

1) Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses consiste à chercher les antécédents de 0 par f .

on doit résoudre l'équation $f(x) = 0$

c'est-à-dire: $2x^2 + 9x - 5 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 9^2 - 4 \times (-5) \times 2 = 81 + 40 = 121 > 0$ d'où l'équation
($= 11^2$)

admet 2 solutions:

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 + 11}{4} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 - 11}{4} = \frac{-20}{4} = -5$

Appelons M_1 et M_2 les points d'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses.

Alors $M_1(\frac{1}{2}; 0)$ et $M_2(-5; 0)$

2) Le coefficient devant x^2 est $2 > 0$ - Donc f est d'abord décroissante puis ensuite croissante. Son minimum est atteint pour $x = x = -\frac{b}{2a} = \frac{-9}{4}$

D'où le tableau de variation suivant:

x	$-\infty$	$-\frac{9}{4}$	$+\infty$
Variation de f		$-\frac{121}{8}$	

on a $f(x) = 2x^2 + 9x - 5$
 $= \frac{81}{8} - \frac{81}{4} - 5$
 $= \frac{81}{8} - \frac{162}{8} - \frac{40}{8}$
 $= -\frac{121}{8}$

3) $g(x) = \sqrt{2x^2 + 9x - 5}$

a) g est définie si et seulement si $2x^2 + 9x - 5 \geq 0$

or, un trinôme est du signe de son coefficient devant x^2 à l'extérieur de ses racines

D'où $D_g =]-\infty; -5] \cup [\frac{1}{2}; +\infty[$

b) $g = \sqrt{f}$ donc g a les mêmes variations que f sur le domaine où elle est définie.

Donc sur $] -\infty; -5]$, g sera décroissante car $] -\infty; -5] \subset] -\infty; -\frac{9}{4}]$ (6)
 et sur $] -\infty; -\frac{9}{4}]$, f est décroissante.

De même, $[\frac{1}{2}; +\infty[\subset [-\frac{9}{4}; +\infty[$ et sur $[-\frac{9}{4}; +\infty[$, f est croissante.

Donc: g sera croissante sur $[\frac{1}{2}; +\infty[$.

D'ici le tableau de variation de g :

x	$-\infty$	-5	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
Variations de g	↘ 0		/ / / /	0 ↗

II) $R(x) = |x+3| - 2$

$$1) R(x) = \begin{cases} x+3-2 = \underline{x+1} & \text{quand } x+3 \geq 0 \text{ c'est-à-dire } \underline{x \geq -3} \\ -x-3-2 = \underline{-x-5} & \text{quand } x+3 \leq 0 \text{ c'est-à-dire } \underline{x \leq -3} \end{cases}$$

2) R est une fonction affine par morceaux.

Pour $x \leq -3$, $R(x) = -x-5$: R décroissante (car le coefficient devant x est négatif)

Pour $x \geq -3$, $R(x) = x+1$: R croissante (car le coefficient devant x est positif).

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
Variations de R	↘ -2		↗

III) Sur $] -\infty; -3]$:

1) 2) Voir les graphiques
 Le point d'intersection à l'axe des ordonnées
 $(-5; 0)$

$$\begin{aligned} 3) g(x) &= -x-5 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+9x-5} = -x-5 \\ \Leftrightarrow 2x^2+9x-5 &= (-x-5)^2 \\ \Leftrightarrow 2x^2+9x-5 &= x^2+10x+25 \\ \Leftrightarrow x^2-x-30 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \times (-30) = 121 > 0 \text{ donc l'équation admet } \textcircled{4}$$

2 solutions.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + 11}{2} = 6 \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - 11}{2} = -5$$

On retrouve les abscisses des points d'intersection de la courbe de g avec celle de h . (car sur $] -\infty, -3]$, $h(x) = -x - 5$)

$$\boxed{-5} \text{ car } 6 \notin] -\infty, -3]$$

