

165

Corrigé du DS de l'athlapege
(Dérivées + probabilités).

Fait le 12/03

①

Exercice (1).

$$f(x) = -5x^2 + 6x - 2$$

$$\begin{aligned} 1a) \text{ Par définition: } \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} &= \frac{-5(-1+h)^2 + 6(-1+h) - 2 - (-5(-1)^2 + 6(-1) - 2)}{h} \\ &= \frac{-5(1+h^2-2h) - 6 + 6h - 2 + 5 + 6 - 2}{h} \\ &= \frac{-5 - 5h^2 + 10h - 6 + 6h - 2 + 5 + 6 - 2}{h} \\ &= \frac{-5h^2 + 16h}{h} = -5h + 16 \end{aligned}$$

$$b) \text{ Par définition également: } \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = f'(-1)$$

$$\text{D'où } \underline{f'(-1) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} (-5h + 16) = 16}$$

$$\begin{aligned} c) (T_{-1}): y &= f'(-1)(x - (-1)) + f(-1) \\ &= 16(x + 1) + (-5 - 6 - 2) \\ &= 16x + 16 - 13 \end{aligned}$$

$$\text{Donc: } \underline{(T_{-1}): y = 16x + 3}$$

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car f est un polynôme.

$$\text{et } f'(x) = -10x + 6 \text{ d'où } \underline{f'(-1) = -10(-1) + 6 = 16}$$

Exercice (2). A(-1; g(-1)) B(0; g(0))

$$1) (T_A): y = m_1x + p_1 \text{ avec } p_1 = 6 \text{ (ordonnée à l'origine).}$$

$$m_1 = \frac{6}{1} = 6 \text{ donc } \underline{(T_A): y = 6x + 6}$$

$(T_B): y = m_2 x + p_2$ avec $p_2 = 2$ (ordonnée à l'origine).

$$m_2 = \frac{-3}{3} = -1 \text{ donc } \underline{(T_B): y = -x + 2}$$

2) $g(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ car g est un polynôme

$$g'(x) = 3x^2 - 4x - 1$$

$$(T_A): y = g'(-1)(x - (-1)) + g(-1) = 6(x+1) + 0 \text{ car } g(-1) = 0$$

$$\underline{(T_A): y = 6x + 6}$$

$$(T_B): y = g'(0)(x - 0) + g(0) = -1 \times x + 2$$

$$\text{Donc } \underline{(T_B): y = -x + 2}$$

on retrouve bien
les équations réduites
des deux tangentes.

3) $\left. \begin{array}{l} (T_A): y = 6x + 6 \\ (T_B): y = -x + 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 6 \neq -1 \text{ donc } (T_A) \text{ n'est pas parallèle à } (T_B) \\ \text{Soit } M(x; y) \text{ point d'intersection de } (T_A) \text{ et } (T_B): \end{array}$

$$(x; y) \text{ vérifie le système } \begin{cases} y = 6x + 6 \\ y = -x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 6 = -x + 2 \\ y = -x + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x = -4 \\ y = -x + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{7} \\ y = \frac{4}{7} + 2 = \frac{4}{7} + \frac{14}{7} = \frac{18}{7} \end{cases}$$

$$\text{Donc } \boxed{M\left(-\frac{4}{7}; \frac{18}{7}\right)}$$

Exercice (3)

1) $\sum_{i=1}^4 P(X=x_i) = 1$ (car le tableau donné traduit la loi de probabilité de X).

$$\text{Donc } \underline{P(X=-20)} = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right) = \frac{12}{12} - \frac{4}{12} - \frac{2}{12} - \frac{3}{12} = \frac{3}{12} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

$$\begin{aligned} 2) E(X) &= \sum_{i=1}^4 x_i P(X=x_i) = 7 \times \frac{1}{3} + 11 \times \frac{1}{6} + (-8) \times \frac{1}{4} + (-20) \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{7}{3} + \frac{11}{6} - 2 - 5 = \frac{14}{6} + \frac{11}{6} - \frac{12}{6} - \frac{30}{6} = \underline{\underline{-\frac{17}{6}}} \end{aligned}$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^4 p_i (x_i - E(X))^2 = \frac{1}{3} \left(7 + \frac{17}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \left(11 + \frac{17}{6}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(-8 + \frac{17}{6}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(-20 + \frac{17}{6}\right)^2$$

$$\underline{V(X) = \frac{5201}{36}}$$

$$\text{donc } \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{5201}{36}} = \frac{\sqrt{5201}}{6} \approx \boxed{12}$$

(3)

$$3) Y = 2X - 5$$

$$E(Y) = E(2X - 5) = 2E(X) - 5 = 2 \times \left(-\frac{17}{6}\right) - 5 = -\frac{17}{3} - \frac{15}{3} = \boxed{-\frac{32}{3}}$$

$$\begin{aligned} V(Y) &= V(2X - 5) = 2^2 V(X) \\ &= 4V(X) \quad (\text{car } V(X+a) = V(X), \text{ pour tout } a \in \mathbb{R}). \\ &= 4 \times \frac{5201}{36} = \boxed{\frac{5201}{9}} \end{aligned}$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{\frac{5201}{9}} = \boxed{\frac{\sqrt{5201}}{3}}$$