

165

Corrigé du D.S. de maths
sur les vecteursFait le 31/01^①Exercice ①: $A(-3; 5)$ $B(2; 1)$ $C(7; -3)$ $D(6; -1)$ $E(10; -\frac{21}{5})$

$$1) \vec{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A) \quad \vec{AB}(5; -4) \quad \vec{AC}(x_C - x_A; y_C - y_A) \\ \vec{AC}(10; -8)$$

On a $\vec{AC} = 2 \vec{AB}$, alors $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires } donc A, B et C sont alignés
de plus, ils ont un point commun

$$2) \vec{DE}(x_E - x_D; y_E - y_D) \quad \vec{DE}(10 - 6; -\frac{21}{5} + 1) \quad \vec{DE}(4; -\frac{16}{5})$$

$$x_{\vec{AB}} \times y_{\vec{DE}} = 5 \times (-\frac{16}{5}) \quad \text{et} \quad x_{\vec{DE}} \times y_{\vec{AB}} = 4 \times (-4) = -16 \\ = -16$$

Donc $\vec{AB}$ et $\vec{DE}$ sont colinéaires. (c'est-à-dire: $(AB) \parallel (DE)$)3) $\vec{AB}(5; -4)$ est un vecteur directeur de (AB)

$$(AB): -4x - 5y + c = 0 \quad \text{or, } A \in (AB): -4 \times (-3) - 5 \times 5 + c = 0 \\ 12 - 25 + c = 0$$

$$\text{Donc: } -4x - 5y + 13 = 0 \quad (\text{Equation cartésienne de } (AB))$$

$$4) \vec{CD}(x_D - x_C; y_D - y_C) \quad \vec{CD}(-1; 2) \text{ est un vecteur directeur de } (CD)$$

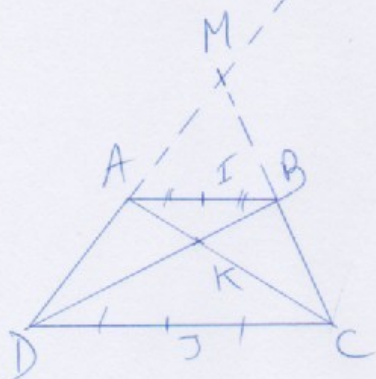
Pour obtenir d'autres vecteurs directeurs de (CD) , il suffit de considérer des vecteurs du type $k\vec{CD}$ où $k \in \mathbb{R}$. Par exemple: $\vec{u}(-2; 4)$, $\vec{v}(\frac{1}{2}; -1)$ sont des vecteurs directeurs de (CD) .

5) Soit $(d): ax + by + c = 0$. $\vec{CD}(-1; 2)$ un vecteur directeur de (d) . Comme $(CD) \parallel (d)$, $\vec{CD}$ est aussi un vecteur directeur de (d) .

$$\text{D'où } (d): 2x + y + c = 0 \quad \text{or, } A \in (d) \text{ d'où: } 2 \times (-3) + 5 + c = 0 \\ \Leftrightarrow c = -4$$

$$\text{Donc: } \underline{(d): 2x + y - 4 = 0}$$

Exercice ②:



1) $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$ sont pas colinéaires: d'où:

$(A, \vec{AB}, \vec{AD})$ est un repère.

2) $A(0;0)$ car c'est l'origine du repère.

$$\vec{AB} = 1\vec{AB} + 0\vec{AD} \text{ d'où } B(1;0)$$

$$\vec{AD} = 0\vec{AB} + 1\vec{AD} \text{ d'où } D(0;1)$$

$$\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{AB} + 0\vec{AD} \text{ d'où } I\left(\frac{1}{2}; 0\right)$$

3) $\vec{AC} = a\vec{AB} + 1\vec{AD}$ d'où $C(a, 1)$ $\left| \vec{AS} = \frac{a}{2}\vec{AB} + 1\vec{AD} \right.$ d'où $S\left(\frac{a}{2}; 1\right)$

4) $\vec{BC}(x_c - x_B; y_c - y_B)$ $\vec{BC}(a-1; 1)$ est un vecteur directeur de (BC)

d'où (BC): $x - (a-1)y + c = 0$ - Or, $C(a; 1) \in (BC)$, d'où:

$$a - (a-1) \times 1 + c = 0$$

$$c = -1$$

Donc: (BC): $x - (a-1)y - 1 = 0$

Or, $M = (AD) \cap (BC)$ - Determinons une équation cartésienne de (AD):

$\vec{AD}(0;1)$ vecteur directeur de (AD) d'où (AD): $x + c = 0$ - A $\in (AD)$ d'où $x = 0$.

$M(x, y)$: $0 - (a-1)y - 1 = 0$ d'où $y = -\frac{1}{a-1}$, $a \neq 1$
d'où $M\left(0; -\frac{1}{a-1}\right)$

5) $\vec{MI}\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{a-1}\right)$ $\vec{MS}\left(\frac{a}{2}; 1 + \frac{1}{a-1}\right)$ On a: $x_{MI} \times y_{MS} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{a-1}\right)$
et $y_{MI} \times x_{MS} = \frac{a}{2} \times \frac{1}{a-1} = \frac{a}{2(a-1)}$

Or, $\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{a-1}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{a-1+1}{a-1}\right) = \frac{1}{2} \frac{a}{a-1}$ Donc: $x_{MI} \times y_{MS} = x_{MS} \times y_{MI}$

c'est-à-dire $\vec{MI}$ et $\vec{MS}$ sont colinéaires. De plus, ils ont un point commun M.

Donc: M, I et S sont alignés

6) $B(1;0) \quad D(0;1) \quad A(0;0) \quad C(a;1)$

(3)

$\vec{BD}(-1;1) \quad \vec{AC}(a;1)$

$\vec{BD}$ vecteur directeur de (BD)

D'où: $(BD): x+y+c=0$ or, $B \in (BD)$, d'où: $1+c=0$
 $\Rightarrow c=-1$

Donc: $(BD): x+y-1=0$

$\vec{AC}$ vecteur directeur de (AC) :

$(AC): x-ay+c=0$. or, $A \in (AC)$, d'où $c=0$

Donc: $(AC): x-ay=0$

$K = (BD) \cap (AC)$. Soit m.d.e $(x;y)$ les coordonnées de K :

$(x;y)$ vérifie $\begin{cases} x+y-1=0 \\ x-ay=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ay+y-1=0 \\ x=ay \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(a+1)=1 \\ x=ay \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{a+1} \\ x=ay \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{a+1} \\ x=\frac{a}{a+1} \end{cases}$

Donc $K \left(\frac{a}{a+1}; \frac{1}{a+1} \right)$

7) $\vec{IK} \left(\frac{a}{a+1} - \frac{1}{2}; \frac{1}{a+1} \right)$ et $\vec{IJ} \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{2}; 1 \right)$

$\left(\frac{a}{a+1} - \frac{1}{2} \right) \times 1 = \frac{2a - (a+1)}{2(a+1)} = \frac{a-1}{2(a+1)} = x_{\vec{IK}} \times y_{\vec{IJ}}$

$\frac{1}{a+1} \times \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{a}{2(a+1)} - \frac{1}{2(a+1)} = \frac{a-1}{2(a+1)} = x_{\vec{IJ}} \times y_{\vec{IK}}$

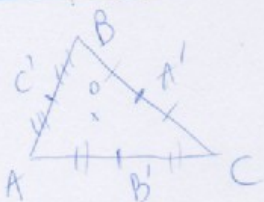
Donc $\vec{IK}$ et $\vec{IJ}$ sont colinéaires. De plus, ils ont un point commun

Donc $\vec{IK}$, $\vec{IJ}$ et K sont alignés

or, dans la question 5), on a montré que: M, I et J sont alignés.

Par conséquent: M, I, J et K sont alignés

Exercice (3):



A' milieu de $\{BC\}$ - B' milieu de $\{AC\}$ (4)
 C' milieu de $\{AB\}$ - O centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

1) $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$

a) Voir figure

b)
$$\begin{aligned} \vec{AH} &= \vec{AO} + \vec{OH} = \vec{AO} + \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OB} + \vec{OC} \\ &= \vec{OA} + \vec{A'B} + \vec{OA} + \vec{A'C} \\ &= 2\vec{OA} + \underbrace{\vec{A'B} + \vec{A'C}}_{=\vec{0} \text{ (car } A' \text{ milieu de } \{BC\})} \end{aligned}$$

Donc $\vec{AH} = 2\vec{OA}$

c) O centre du cercle circonscrit au triangle ABC - A' milieu de $\{BC\}$
 (= O point de concours des médiatrices)

D'où (OA') médiatrice de $\{BC\}$ - Alors, $(OA') \perp (BC)$

D'après 1) b), $(AH) \parallel (OA')$ (car $\vec{AH}$ et $\vec{OA}$ sont colinéaires)

Si deux droites sont parallèles, alors toute perpendiculaire à l'une est aussi perpendiculaire à l'autre - Donc $(AH) \perp (BC)$

d) De même, on a: $(BH) \perp (AC)$ et $(CH) \perp (AB)$

e) Les droites (AH) , (BH) et (CH) sont les 3 hauteurs du triangle ABC .

Elles passent toutes par H . Elles sont concurrentes. (H est l'orthocentre)

2) G : centre de gravité de ABC : $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

On sait que $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$

$$= \vec{OG} + \vec{GA} + \vec{OG} + \vec{GB} + \vec{OG} + \vec{GC} \text{ (par la relation de Chasles)}$$

$$= 3\vec{OG} + \underbrace{\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}}_{=\vec{0}}$$

Donc: $\vec{OH} = 3\vec{OG}$

$\vec{OH}$ et $\vec{OG}$ sont colinéaires avec un point commun.

Par conséquent: O , G et H sont alignés (Théorème d'Euler)