1ère 6S

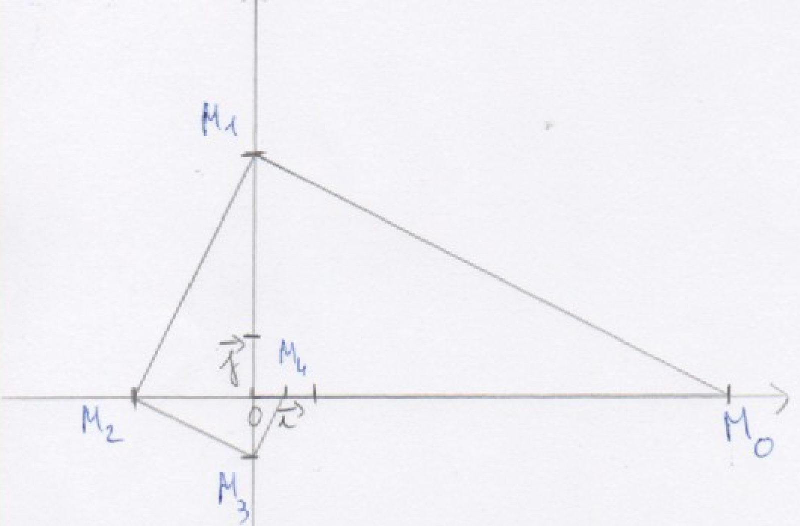
DM sur les angles orientés et les suites

(1)

1) a). Pour M_0 : cercle de centre O et de rayon $\frac{8}{2^0} = 8$ cm

$(\vec{i};\overrightarrow{OM_0}) = 0$

- Pour M_1 : cercle de centre O et de rayon $\frac{8}{2^1} = 4$ cm $(\vec{i};\overrightarrow{OM_1}) = \frac{\pi}{2}$
- Pour M_2 : cercle de centre O et de rayon $\frac{8}{2^2} = \frac{8}{4} = 2$ cm $(\vec{i};\overrightarrow{OM_2}) = \pi$
- Pour M_3 : cercle de centre O et de rayon $\frac{8}{2^3} = 1$ cm $(\vec{i};\overrightarrow{OM_3}) = \frac{3\pi}{2}$
- Pour M_4 : cercle de centre O et de rayon $\frac{8}{2^4} = \frac{1}{2}$ cm $(\vec{i};\overrightarrow{OM_4}) = 2\pi$



b) Dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$: $M_0(8;0)$ car $OM_0 = 8$ et $(\vec{i},\overrightarrow{OM_0}) = 0$ c'est-à-dire M_0 est sur l'axe des abscisses.

$M_1(0;4)$ car $OM_1 = 4$ et $(\vec{i},\overrightarrow{OM_1}) = \frac{\pi}{2}$ c'est-à-dire M_1 est sur l'axe des ordonnées.

$M_2(-2;0)$ car $OM_2 = 2$ et $(\vec{i},\overrightarrow{OM_2}) = \pi$ c'est-à-dire M_2 est sur l'axe des abscisses.

$M_3(0;-1)$ car $OM_3 = 1$ et $(\vec{i},\overrightarrow{OM_3}) = \frac{3\pi}{2}$ c'est-à-dire M_3 est sur l'axe des ordonnées.

$M_4(\frac{1}{2};0)$ car $OM_4 = \frac{1}{2}$ et $(\vec{i},\overrightarrow{OM_4}) = 2\pi$ c'est-à-dire M_4 est sur l'axe des abscisses.

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$: On considère le triangle OM_nM_{n+1}

$$(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_{n+1}}) = (\overrightarrow{OM_n}, \vec{\imath}) + (\vec{\imath}, \overrightarrow{OM_{n+1}}) \quad [2\pi]$$

(Relation de Chasles)

$$= -(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM_n}) + (\vec{\imath}, \overrightarrow{OM_{n+1}}) \quad [2\pi]$$

$$= -\frac{n\pi}{2} + \frac{n+1}{2}\pi \quad [2\pi]$$

$$(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_{n+1}}) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Par conséquent : $\underline{OM_nM_{n+1}}$ sont des triangles rectangles en O pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

On applique le théorème de Pythagore dans le triangle OM_nM_{n+1} :

$$M_nM_{n+1}^2 = OM_n^2 + OM_{n+1}^2 = \left(\frac{8}{2^n}\right)^2 + \left(\frac{8}{2^{n+1}}\right)^2$$

$$= \frac{64}{2^{2n}} + \frac{64}{2^{2n+2}} = \frac{2^2 \times 64 + 64}{2^{2(n+1)}}$$

$$= \frac{320}{(2^{n+1})^2}$$

$$= \frac{64 \times 5}{(2^{n+1})^2}$$

D'où $\underline{M_nM_{n+1}} = \sqrt{\frac{64 \times 5}{(2^{n+1})^2}} = \underline{\frac{8\sqrt{5}}{2^{n+1}}}$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{8\sqrt{5}}{2^{n+1}}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{8\sqrt{5}}{2^{n+2}} \times \frac{2^{n+1}}{8\sqrt{5}} = \frac{1}{2} \quad \text{(indépendant de } n\text{)}$$

D'où $\underline{(u_n) \text{ suite géométrique de raison } q = \frac{1}{2}}$, de premier terme $\underline{u_0 = \frac{8\sqrt{5}}{2}}$

4) $\ell_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ = Somme des $(n+1)$ premiers termes de $(u_n)_n$

comme (u_n) est géométrique, $\ell_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{8\sqrt{5}}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$

D'où $\underline{\ell_n} = \frac{8\sqrt{5}}{2} \times 2 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = \underline{8\sqrt{5}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)}$

5) Narration de recherche : (3)

$\ell_n \in [8\sqrt{5}-10^{-4} ; 8\sqrt{5}[$

$8\sqrt{5} \simeq 17,88854$

d'où $8\sqrt{5}-10^{-4} \simeq 17,88844$

On peut calculer une table de valeurs des termes de la suite (ℓ_n) à la calculatrice.

On a : pour $n = 17$, $\ell_n = 17,88848 < 8\sqrt{5}$

Donc à partir de $n = 17$, $\ell_n \in [8\sqrt{5}-10^{-4} ; 8\sqrt{5}[$