Nom et prénom : ..... Classe : .....

LYCEE JEAN XXIII

BAC BLANC
SESSION AVRIL 2018

Première S

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
Durée : 3 h

Sujet à rendre avec la copie

L'usage de la calculatrice est autorisé

Barème : 40 points

Mme Fayard – M. Nasser – M. Mangeard

Exercice 1 *(8 points)*

VRAI ou FAUX

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.
Justifier soigneusement.

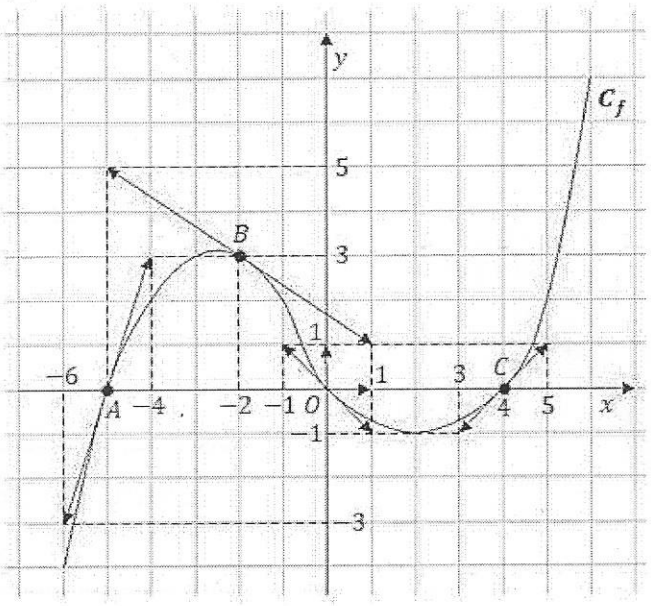
1°. La parabole d'équation $y = -x^2 - 8x + 9$ est située au-dessus de l'axe des abscisses pour $x \in [-9\,;1]$.

2°. Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-1\,;4)$, $B(\sqrt{3}\,;2)$ et $C(1+\sqrt{3}\,;\,3-\sqrt{3})$.
Les points A, B et C sont alignés.

3°. On donne : $S = 1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + 1\,000$. Alors : $S = 167\,167$.

4°. On donne : $S = 1 - 2 + 4 - 8 + \cdots + 256 - 512$. Alors : $S = -341$.

5°. On a représenté ci-contre la courbe représentative C_f d'une fonction f et les tangentes à cette courbe aux points O, A, B et C.
Alors :



a) $f'(-2) = -0{,}66$.

b) $f(0) = 4$.

c) La tangente en A à la courbe C_f a pour coefficient directeur 3.

d) L'équation réduite de la tangente à la courbe C_f au point O est $y = -x$.

e) Le nombre dérivé de f en 4 est 0.

Exercice 2 *(6,5 points)*

Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
On donne les points A(3 ; 6), B(5 ; 2) et C(−4 ; 1).
On note D le milieu du segment [BC] et G le centre de gravité du triangle ABC.

1) Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).

2) (d) est la droite de vecteur directeur $\vec{u}(8\,;3)$ passant par le point C
On note E le point d'intersection des droites (AB) et (d).

a) Déterminer une équation cartésienne de la droite (d).

b) Montrer que (CE) est la médiane issue de C du triangle ABC.

3) a) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AD).

b) En déduire les coordonnées du point G.

Exercice 3 *(9 points)*

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 0{,}25x^2 + 2$.

C_f est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Partie A

1°. En utilisant la définition du nombre dérivé, déterminer par calcul $f'(2)$.

2°. En utilisant la définition du nombre dérivé, montrer que $f'(a) = \frac{a}{2}$, a étant un réel.

3°. Déterminer, en fonction de a, l'équation réduite de la tangente (T_a) à la courbe au point d'abscisse a.

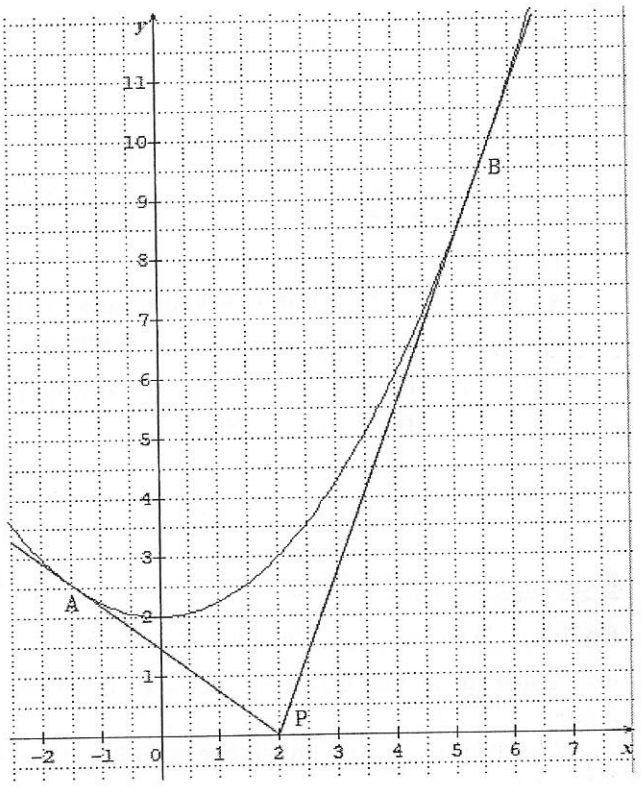
Partie B

La figure ci-contre est une partie d'un plan qui représente un circuit automobile.

Un observateur placé au point P n'aperçoit dans son champ de vision que le « virage AB » (c'est-à-dire l'arc de courbe d'extrémités A et B).

Sur ce plan, l'unité graphique mesure 25 m.

L'arc de courbe symbolisant le virage a pour équation $y = 0{,}25x^2 + 2$ et le point P a pour coordonnées $(2\,;0)$.



L'objectif est de déterminer à quelle distance l'observateur aperçoit la voiture à l'entrée du virage et la perd-il à la sortie du virage (c'est-à-dire les distances PA et PB).

1°. En utilisant le résultat obtenu à la question 3°, partie A, montrer que si (T_a) passe par P alors $a^2 - 4a - 8 = 0$.

2°. En déduire les valeurs possibles de a.

3°. Déterminer les valeurs arrondies des distances PA et PB, au décimètre près. Détailler le calcul.

Exercice 4 *(7,5 points)*

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + n + 1 \end{cases}$

1) Calculer u_1, u_2 et u_3. La suite (u_n) est-t-elle arithmétique ? géométrique ?

2) On pose : $v_n = u_n + n + 2$. Calculer v_0, v_1, v_2 et v_3.

3) a) Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 2v_n$.

b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

c) Calculer $S = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

4) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = 3 \times 2^n - n - 2$.

5) On pose : $S' = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

Montrer que $S' = 3 \times 2^{n+1} - 3 - \frac{(n+1)(n+4)}{2}$

Exercice 5 *(9 points)*

Au 1er janvier 2005, une ville en pleine expansion avait une population de 100 000 habitants.
Un bureau d'étude fait l'hypothèse qu'à partir du 1er janvier 2005 :

- le nombre d'habitants de la ville augmente chaque année de 5 % du fait des naissances et des décès ;
- du fait des mouvements migratoires, 4 000 personnes supplémentaires viennent s'installer chaque année dans cette ville.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'habitants de cette ville au 1er janvier de l'année 2005 + n.
On a donc $u_0 = 100\,000$.

1) Calculer u_1 et u_2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?

2) Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}05u_n + 4\,000$.

3) Pour tout entier naturel n on pose $v_n = u_n + 80\,000$.
   a) Calculer v_0.
   b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   c) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire que $u_n = 180\,000 \times (1{,}05)^n - 80\,000$.

4) On utilise le modèle théorique que l'on vient d'étudier.
   a) Quel sera le nombre d'habitants de cette ville au 1er janvier 2020 ?
   b) Montrer que $u_{n+1} - u_n = 9\,000 \times (1{,}05)^n$. En déduire le sens de variation de la suite (u_n)
   c) A l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de quelle année la population de cette ville dépassera 200 000 habitants ?

Exercice bonus *(3 points)* +3 Bonus

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 4x + 1$.
On a tracé sur la feuille annexe la courbe représentative C_f de f dans un repère orthonormé.

Pour tout réel m, on considère la droite D_m passant par les points $A_m(m\,;0)$ et $B_m(m-2\,;1)$.

a) Dans le repère de la feuille annexe, tracer les droites D_0 , D_{-4} et D_{-6}.

b) Conjecturer graphiquement le nombre de points d'intersection de D_m et C_f, en fonction de m.

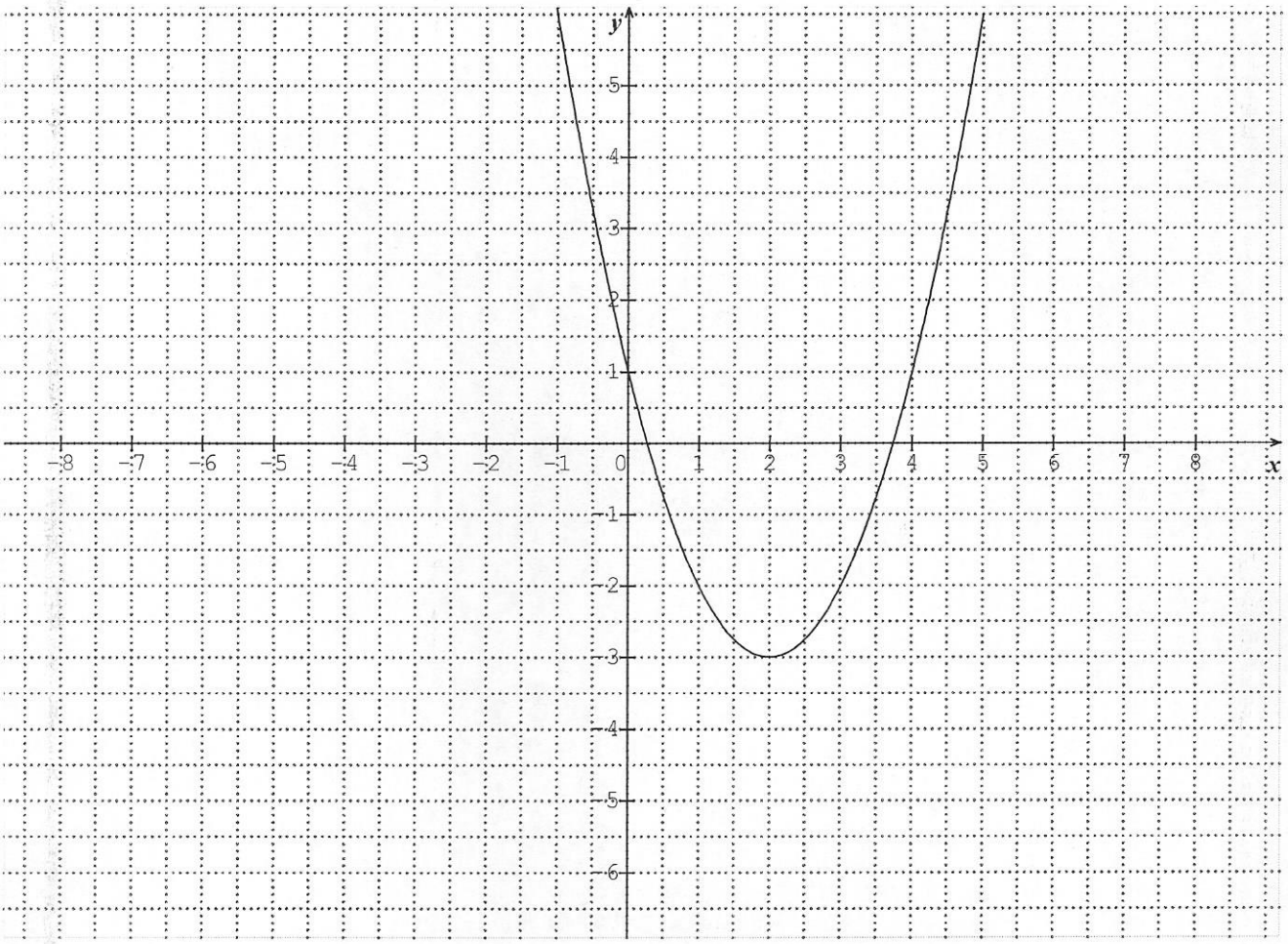
c) Déterminer une équation cartésienne de D_m en fonction de m.

d) Donner une équation cartésienne de la droite D_m qui coupe C_f en un unique point.

Nom et prénom de l'élève : ..... Classe : .....

BAC BLANC 1ERE S SESSION AVRIL 2018

MATHEMATIQUES

Feuille annexe à joindre à la copie

Exercice 3