1ère 5S

Corrigé du DS commun

(Fait le 14/11/17)

Exercice ①: /5

a) Si 1 solution de $f(x)=0$, alors $a\times 1^2+b\times 1+c=0$
$\iff a+b+c=0$ ①

b) Si pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)\geq 0$:

contre-exemple: $f(x)=x^2+x+2$ $\quad \Delta=1-8=-7<0$

$a>0$, d'où $f(x)>0$, pour tout $x\in\mathbb{R}$. (1,5)

mais $\Delta<0$

Donc c'est faux.

c) Si $\Delta>0$, $a>0$:

$\Delta>0 \iff f$ admet deux racines distinctes

f est du signe de a à l'extérieur de ses racines. Or, $a>0$

Tableau de signes: (1,5)

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

d'où $f(x)<0$, pour $x\in\,]x_1;x_2[$

Donc c'est vrai.

d) f atteint son extremum en $x=\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ $\quad$ Donc c'est faux. (0,5)

e) contre-exemple: Soit $f(x)=x^2-x-6$ $\quad a=1>0$

D'où f admet un minimum sur $\mathbb{R}$ (0,5)

mais $\Delta=b^2-4ac=1+24=25>0$

Donc c'est faux.

Exercice ②: /6

1) $h(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{7}{2}x+3=\dfrac{1}{2}\left[x^2-7x\right]+3$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(x-\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2\right] + 3$$

(1,5)

$$= \frac{1}{2}\left(x-\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{8} + \frac{24}{8}$$

$$\underline{h(x) = \frac{1}{2}\left(x-\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{25}{8}}$$ (forme canonique de h)

2) f a son coefficient a négatif : d'où la parabole représentant f est orientée vers le bas. Or, a_g et a_h sont positifs.

Donc <u>f est représentée par (C_2)</u>.

(1,5)

(C_1) passe par le point de coordonnées $(0;-9)$

Or, $h(0) = 3$ et $g(0) = -9$

D'où <u>g est représentée par (C_1)</u>

3) x antécédent de 0 par $f \Leftrightarrow f(x) = 0$

$$\Leftrightarrow -x^2+7x-6 = 0 \quad \begin{cases} a=-1 \\ b=7 \\ c=-6 \end{cases}$$

(1,5)

$\Delta = b^2 - 4ac = 49 - 4\times(-1)\times(-6)$

$= 49 - 24 = 25 > 0$ d'où l'équation admet deux solutions distinctes.

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7+5}{-2} = 1 \quad \text{et } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7-5}{-2} = 6$$

Donc <u>0 a deux antécédents par f : $\{1;6\}$</u>

4) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x^2+7x-6 = x^2+2x-9$

$$\Leftrightarrow -2x^2+5x+3 = 0 \quad \begin{cases} a=-2 \\ b=5 \\ c=3 \end{cases}$$

(1,5)

$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4\times(-2)\times 3 = 49 > 0$ d'où l'équation admet deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5+7}{-4} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5-7}{-4} = 3$

Il y a donc 2 points d'intersection : $A\left(-\frac{1}{2}; f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ et $B(3; f(3))$

Or, $f(-\frac{1}{2}) = -(-\frac{1}{2})^2 + 7\times(-\frac{1}{2}) - 6 = -\frac{1}{4} - \frac{14}{4} - \frac{24}{4} = -\frac{39}{4}$

$f(3) = -3^2 + 7\times 3 - 6 = -9 + 15 = 6$

Donc $A(-\frac{1}{2} ; -\frac{39}{4})$ et $B(3 ; 6)$

Exercice 3 : /5,5

1) a) $|4x+5| = |-3x+7|$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+5 = -3x+7 & (1) \\ \text{ou} \\ 4x+5 = 3x-7 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 2 \\ \text{ou} \\ x = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ \text{ou} \\ x = -12 \end{cases}$$

1,5

$$S = \left\{\frac{2}{7} ; -12\right\}$$

b) $\sqrt{5x+1} = 7x - 17$ Cette équation est définie si et seulement si :

$5x+1 \geq 0$ et $7x - 17 \geq 0$

$\Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{5}$ et $x \geq \frac{17}{7}$

Par conséquent : On va résoudre sur $\left[\frac{17}{7} ; +\infty\right[$

$5x+1 = (7x-17)^2 \Leftrightarrow 5x+1 = 49x^2 - 238x + 289$

$\Leftrightarrow 49x^2 - 243x + 288 = 0$

1,5

$\Delta = b^2 - 4ac = (-243)^2 - 4\times 49\times 288 = 2601 > 0$

D'où l'équation admet deux solutions distinctes :

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{243+51}{98} = \frac{294}{98} = 3 \in \left[\frac{17}{7} ; +\infty\right[$

et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{243-51}{98} = \frac{192}{98} = \frac{96}{49} \notin \left[\frac{17}{7} ; +\infty\right[$

Donc : $S = \{3\}$

2) $\dfrac{4x}{x+2} - \dfrac{3x}{x-1} \leq -4$

Valeurs interdites : $x+2=0 \iff x=-2$
et $x-1=0 \iff x=1$

On va résoudre sur $\mathbb{R} \setminus \{-2;1\}$

$$\frac{4x(x-1)-3x(x+2)}{(x+2)(x-1)} + \frac{4(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-1)} \leq 0$$

$$\iff \frac{4x^2-4x-3x^2-6x+4x^2-4x+8x-8}{(x+2)(x-1)} \leq 0$$

$$\iff \frac{5x^2-6x-8}{(x+2)(x-1)} \leq 0$$

2,5

Etude du signe de $5x^2-6x-8$: $\begin{cases} a=5 \\ b=-6 \\ c=-8 \end{cases}$

$\Delta = b^2-4ac = 36-4\times5\times(-8)$
$= 196 > 0$ d'où le trinôme admet deux racines distinctes

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6+14}{10} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6-14}{10} = \dfrac{-8}{10} = -\dfrac{4}{5}$

Le trinôme est du signe de a à l'extérieur de ses racines

Or, $a=5>0$ d'où le signe de $5x^2-6x-8$:

x	$-\infty$		$-\frac{4}{5}$		2		$+\infty$
signe de $5x^2-6x-8$		+	0	−	0	+	

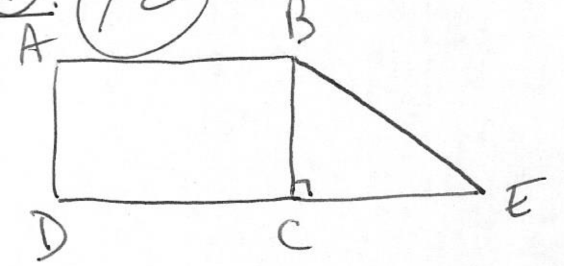
Tableau de signes de $\dfrac{5x^2-6x-8}{(x+2)(x-1)}$:

x	$-\infty$		-2		$-\frac{4}{5}$		1		2		$+\infty$
signe de $5x^2-6x-8$		+		+	0	−		−	0	+	
signe de $x+2$		−	0	+		+		+		+	
signe de $x-1$		−		−		−	0	+		+	
signe de $\frac{5x^2-6x-8}{(x+2)(x-1)}$		+	‖	−	0	+	‖	−	0	+	

Donc :

$S =]-2;-\frac{4}{5}] \cup]1;2]$

Exercice (4) : /2



$AB = 2BC$

$CE = 8\,cm$

$BC = x$.

Aire (Polygone ABED) = Aire (rectangle ABCD) + Aire (triangle BCE)

$$= 2x \times x + \frac{8x}{2} = 2x^2 + 4x$$

Aire (Polygone ABED) $= 8\,cm^2 \iff 2x^2 + 4x = 8$ 0,5

$$\iff 2x^2 + 4x - 8 = 0$$

$$\iff x^2 + 2x - 4 = 0$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times (-4)$

$= 20 > 0$ d'où l'équation admet deux solutions distinctes.

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+\sqrt{20}}{2} = \frac{-2+2\sqrt{5}}{2} = -1+\sqrt{5} > 0$

et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-\sqrt{20}}{2} = -1-\sqrt{5} < 0$ or, x est une longueur.

Pour $x = \sqrt{5} - 1$, l'aire du polygone ABED est de $8\,cm^2$

Exercice (5) : /3,5

$$f(x) = \frac{3x^2 - x - 2}{6x - x^2 - 5}$$

1) f est définie si et seulement $6x - x^2 - 5 \neq 0$

$-x^2 + 6x - 5 = 0$ $\quad \Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4 \times (-1) \times (-5)$ (1)

$= 16 > 0$ d'où l'équation admet deux solutions distinctes.

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6+4}{-2} = 1$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6-4}{-2} = 5$

Donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1 ; 5\}$

2) $f(x) = 0 \iff 3x^2 - x - 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \times 3 \times (-2) = 25 > 0$ d'où l'équation admet deux solutions distinctes.

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+5}{6} = 1$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-5}{6} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$ (1)

Donc : $\boxed{S = \left\{-\frac{2}{3}\right\}}$

3) On a : $f(x) = \dfrac{3\cancel{(x-1)}(x+\frac{2}{3})}{-\cancel{(x-1)}(x-5)} = \boxed{\dfrac{3(x+\frac{2}{3})}{-x+5}}$ (1,5)

Exercice 6 : (6)

$u(x) = 2x^2 - 2x - 4$

1) $a = 2 > 0$, d'où u est d'abord décroissante, puis croissante.

$\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ $\qquad \beta = u(\alpha) = u\left(\frac{1}{2}\right) = 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\times\frac{1}{2} - 4$

$= \frac{1}{2} - 1 - 4$

$= \frac{1}{2} - \frac{10}{2} = -\frac{9}{2}$

D'où le tableau de variations de u sur $\mathbb{R}$:

(1,5)

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Variations de u		$\searrow$	$-\frac{9}{2}$	$\nearrow$	

2) Voir la représentation graphique (1)

3) $f = \sqrt{u}$

a) f est définie si et seulement si $u(x) \geq 0$

Signe de $u(x)$: (0,75)

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4\times 2\times(-4) = 36 > 0$ d'où le trinôme admet deux racines distinctes.

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2+6}{4} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2-6}{4} = -1$

Le trinôme est du signe de a à l'extérieur de ses racines.

Or, $a = 2 > 0$.

Donc $D_f =]-\infty ; -1] \cup [2 ; +\infty[$

b) Sur $]-\infty ; -1]$:

Soient $a, b \in]-\infty ; -1]$ avec $a < b$ (0,75)

D'après les variations de u (question 1))

u est strictement décroissante sur $]-\infty ; \frac{1}{2}]$, d'où en particulier sur $]-\infty ; -1]$

c'est-à-dire $u(a) > u(b) \geq 0$

Or, $x \longmapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

D'où $\sqrt{u(a)} > \sqrt{u(b)}$, c'est-à-dire $f(a) > f(b)$

Donc <u>f est strictement décroissante sur $]-\infty;-1]$</u>

<u>Sur $[2;+\infty[$</u> :

On raisonne de même sur cet intervalle

D'où <u>f est strictement croissante sur $[2;+\infty[$</u>

4) $h = \dfrac{-2}{u}$

a) h est définie si et seulement si $u \neq 0$

or, $u(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 2$ (question 3 a))

Donc $D_h = \mathbb{R} \setminus \{2;-1\}$

0,5

b) * <u>Sur $]-\infty;-1[$</u> :

soient $a, b \in]-\infty;-1[$ avec $a < b$

Or, u est strictement décroissante sur $]-\infty;\frac{1}{2}]$, d'où en particulier sur $]-\infty;-1[$. D'où : $u(a) > u(b) > 0$

or, $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

d'où $\dfrac{1}{u(a)} < \dfrac{1}{u(b)}$ et $\dfrac{-2}{u(a)} > \dfrac{-2}{u(b)} \Leftrightarrow h(a) > h(b)$

Donc h <u>est strictement décroissante sur $]-\infty;-1[$</u>

* <u>Sur $]-1;2[$</u> :

- <u>Plaçons-nous d'abord sur $]-1;\frac{1}{2}]$</u> :

Soient $a, b \in]-1;\frac{1}{2}]$ avec $a < b$

Sur cet intervalle u est strictement décroissante : d'où $u(a) > u(b) > 0$

d'où $\dfrac{1}{u(a)} < \dfrac{1}{u(b)}$ car $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

d'où $\dfrac{-2}{u(a)} > \dfrac{-2}{u(b)}$ c'est-à-dire : $h(a) > h(b)$ donc h strictement décroissante sur $]-1;\frac{1}{2}]$

1,5

- Plaçons-nous sur $[\frac{1}{2};2[$:

On raisonne de même : on montre que h est strictement croissante sur $[\frac{1}{2};2[$.

* Sur $]2;+\infty[$:

Soient $a, b \in]2;+\infty[$, avec $a<b$

Or, u strictement croissante sur $]2;+\infty[$, d'où $u(a)<u(b)$

$$\frac{1}{u(a)} > \frac{1}{u(b)}$$, car $x \longmapsto \frac{1}{x}$ strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

d'où $\frac{-2}{u(a)} < \frac{-2}{u(b)}$ c'est-à-dire $h(a)<h(b)$

Donc h strictement croissante sur $]2;+\infty[$.

Exercice 7 : 12

$f(x) = a - b\sqrt{3x+1}$

1) f est définie si et seulement si $3x+1 \geq 0$
$\iff x \geq -\frac{1}{3}$
d'où : $D_f = [-\frac{1}{3};+\infty[$ 0,5

2) $f(-\frac{1}{3}) = a - b\sqrt{3\times(-\frac{1}{3})+1} = a = 5$

$f(5) = -3 \iff 5 - b\sqrt{3\times 5+1} = -3 \iff 5-4b=-3$
$\iff 4b = 8$ 1,5
$\iff b = 2$

Donc $f(x) = 5 - 2\sqrt{3x+1}$

BONUS

3) Soient $a, b \in [-\frac{1}{3};+\infty[$, avec $a<b$

$-\frac{1}{3} \leq a < b$ +1,5

$-1 \leq 3a < 3b$

$0 \leq 3a+1 < 3b+1$

or, $x \longmapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$, d'où :

$0 \leq \sqrt{3a+1} < \sqrt{3b+1}$

$$0 \geqslant -2\sqrt{3a+1} > -2\sqrt{3b+1}$$

$$5 \geqslant 5-2\sqrt{3a+1} > 5-2\sqrt{3b+1}$$

c'est-à-dire $f(a) > f(b)$

Donc f est strictement décroissante sur $[-\frac{1}{3} ; +\infty[$

4) $f(x) = x \iff 5-2\sqrt{3x+1} = x$

$\iff 2\sqrt{3x+1} = 5-x$

$\iff \sqrt{3x+1} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}x \quad (1)$

$3x+1 \geqslant 0$ et $\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x \geqslant 0$

$\iff x \geqslant -\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}x \leq \frac{5}{2} \iff x \leq 5$

on va résoudre sur $[-\frac{1}{3} ; 5]$

+ 1,5

On passe (1) au carré :

$$3x+1 = \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x\right)^2$$

$$\iff 3x+1 = \frac{25}{4} - \frac{5}{2}x + \frac{1}{4}x^2$$

$$\iff \frac{1}{4}x^2 - \frac{11}{2}x + \frac{21}{4} = 0$$

$$\Delta = \left(-\frac{11}{2}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{4} \times \frac{21}{4} = \frac{121}{4} - \frac{21}{4} = \frac{100}{4} > 0$$

D'où l'équation admet deux solutions distinctes

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{11}{2}+\frac{10}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{21}{2} \times 2 = 21 \notin [-\frac{1}{3} ; 5]$$

et $$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{11}{2}-\frac{10}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times 2 = 1 \in [-\frac{1}{3} ; 5]$$

Donc $S = \{1\}$