NOM :……………………………….Prénom :………………………........

CORRIGÉ Fait le

Première 5S	**Devoir n°1 : Second degré**	Lundi 18 septembre 2017

- Calculatrices autorisées
- ***Répondre directement sur le sujet***
- Durée : 1h30

Observations :

NOTE :

Exercice 1 : /3

Déterminer **en détaillant** la forme canonique des deux trinômes du second degré suivants :

$f(x) = 3x^2 - 5x + 2$	$g(y) = (3y + 1)(5 - y)$
$= 3\left(x^2 - \frac{5}{3}x\right) + 2$ $= 3\left[\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{36}\right] + 2$ $= 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{12} + \frac{24}{12}$ $f(x) = 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{12}$	$= 15y - 3y^2 + 5 - y$ $= -3y^2 + 14y + 5$ $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-14}{-6} = \frac{7}{3}$ $\beta = g(\alpha) = g\left(\frac{7}{3}\right) = -3\left(\frac{7}{3}\right)^2 + 14 \times \frac{7}{3} + 5$ $= -\frac{49}{3} + \frac{98}{3} + \frac{15}{3} = \frac{64}{3}$ D'où $g(y) = -3\left(y - \frac{7}{3}\right)^2 + \frac{64}{3}$

1,5 1,5

Exercice 2 : /3

Résoudre les équations suivantes :

1) $5x^2 - 7x + 2 = 0$	2) $9y^2 + 49 + 42y = 0$	3) $(-2x + 1)(x - 3) - (4x + 5) = 0$
$a = 5 \quad b = -7 \quad c = 2$ $\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 5 \times 2$ $= 49 - 40 = 9 > 0$ d'où l'équation admet 2 solutions distinctes $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7+3}{10} = 1$ $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7-3}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$	$a = 9 \quad b = 42 \quad c = 49$ $\Delta = b^2 - 4ac = 42^2 - 4 \times 9 \times 49 = 0$ L'équation n'admet qu'une seule solution $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-42}{18} = \frac{-7 \times 6}{3 \times 6} = -\frac{7}{3}$ $\boxed{S = \left\{-\frac{7}{3}\right\}}$	$\Leftrightarrow -2x^2 + 6x + x - 3 - 4x - 5 = 0$ $\Leftrightarrow -2x^2 + 3x - 8 = 0 \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \\ c = -8 \end{cases}$ $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \times (-2) \times (-8)$ $= 9 - 64 < 0$ L'équation n'admet pas de solution réelle $\boxed{S = \emptyset}$

1,5 1 1

Exercice 3 : /3

Factoriser les trinômes suivants en détaillant les étapes :

1) $f(x) = 7x^2 + 20x - 3$ $\begin{cases} a = 7 \\ b = 20 \\ c = -3 \end{cases}$	2) $g(x) = (2x - 1)(x + 1) - 2(x - 5)$
$\Delta = b^2 - 4ac = 20^2 - 4 \times 7 \times (-3)$ $= 400 + 84 = 484 > 0$ d'où le trinôme admet 2 racines distinctes. $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-20+22}{14} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-20-22}{14} = \frac{-42}{14} = -3$	$= 2x^2 + \cancel{2x} - x - 1 - \cancel{2x} + 10 \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 9 \end{cases}$ $= 2x^2 - x + 9$ $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times 9 = 1 - 72 < 0$ D'où le trinôme n'admet pas de factorisation en produit de facteurs du 1er degré.

D'où $f(x) = 7\left(x - \frac{1}{7}\right)(x + 3)$

1,5 1,5

NOM :..................................Prénom :...............................

Exercice 4 : /3

Etudier les variations du trinôme suivant en justifiant soigneusement : $f(x) = -3x^2 + 7(x-4)(x+2)$

$f(x) = -3x^2 + 7(x^2 + 2x - 4x - 8)$

$= -3x^2 + 7x^2 - 14x - 56$

$= 4x^2 - 14x - 56.$

$a = 4 > 0$, d'où f est d'abord décroissante puis croissante.

$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$

$\beta = f(\alpha) = f\left(\frac{7}{4}\right) = 4 \times \left(\frac{7}{4}\right)^2 - 14 \times \frac{7}{4} - 56$

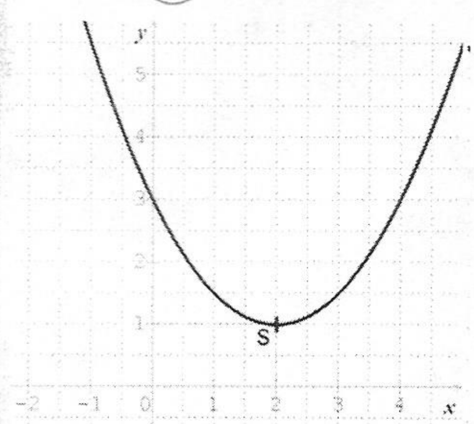
$= \frac{49}{4} - \frac{98}{4} - \frac{56 \times 4}{4}$

$= -\frac{49}{4} - \frac{224}{4} = -\frac{273}{4}$

D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$\frac{7}{4}$	$+\infty$
Variation de f	↘	$-\frac{273}{4}$	↗

Exercice 5 : /3



Parabole représentant le trinôme f

Avec les données graphiques ci-contre, déterminer l'expression ***développée et réduite*** du trinôme f représenté (A détailler) :

Par lecture graphique $S(2;1)$

C'est-à-dire : $\alpha = 2$ et $\beta = 1$

D'où $f(x) = a(x-2)^2 + 1$ (Forme canonique de f)

D'autre part : $f(0) = 3 \Leftrightarrow a(-2)^2 + 1 = 3$

$\Leftrightarrow 4a + 1 = 3 \Leftrightarrow 4a = 2$

$\Leftrightarrow a = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

D'où $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 1$

$= \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 4) + 1$

$\underline{f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3}$ 1

2

Exercice 6 : /5

Soit m, un nombre réel, on souhaite résoudre l'équation (E) : $x^2 + 3mx + 9 = 0$

$\begin{cases} a = 1 \\ b = 3m \\ c = 9 \end{cases}$

1) Démontrer que le discriminant de (E) est égal à $9(m+2)(m-2)$

1 $\Delta = b^2 - 4ac = (3m)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 9m^2 - 36 = 9(m^2 - 4)$

donc $\underline{\Delta = 9(m+2)(m-2)}$

2) Etudier le signe de Δ selon les valeurs de m à l'aide d'un tableau.

m	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
Signe de $m+2$	$-$	0	$+$		$+$
Signe de $m-2$	$-$		$-$	0	$+$
Signe de Δ	$+$	0	$-$	0	$+$

$m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > -2$

1,5 $m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > 2$

d'où le tableau de signes suivant :

$\begin{cases} \cdot\ \Delta > 0 \text{ pour } m \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[\\ \cdot\ \Delta = 0 \text{ pour } m = -2 \text{ ou } 2 \\ \cdot\ \Delta < 0 \text{ pour } m \in]-2; 2[\end{cases}$

NOM :...................................Prénom :...............................

3) Résoudre (E) en tenant compte des différents cas de la question 2)

- Pour $m \in]-2;2[$: $\Delta < 0$: pas de solution réelle $\boxed{S = \emptyset}$

0,5

- Pour $m = 2$ ou -2 : $\Delta = 0$ 1 seule solution

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-3m}{2} \quad \boxed{S = \left\{\frac{-3m}{2}\right\}}$$

$= -3$ si $m = 2$ et $x_0 = 3$ si $m = -2$

2,5

- Pour $m \in]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$, $\Delta > 0$ - (E) admet 2 solutions distinctes.

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3m+\sqrt{9(m+2)(m-2)}}{2}$$

et

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3m-\sqrt{9(m+2)(m-2)}}{2}$$

$$\boxed{S = \left\{\frac{3(-m+\sqrt{(m+2)(m-2)})}{2} ; \frac{3(-m-\sqrt{(m+2)(m-2)})}{2}\right\}}$$

DEFI (Bonus)

+2

On considère des triangles rectangles dont les mesures des côtés sont des entiers naturels.

Montrer qu'il n'existe qu'un seul triangle rectangle ayant des côtés dont les mesures sont des entiers naturels consécutifs. On donnera les mesures des côtés de ce triangle.

Soit n : la longueur du plus petit côté $n+1$ et $n+2$ sont respectivement celles des autres côtés.

Théorème de Pythagore : $(n+2)^2 = (n+1)^2 + n^2$

$\Leftrightarrow \cancel{n^2} + 4n + 4 = \cancel{n^2} + 2n + 1 + n^2$

$\Leftrightarrow -n^2 + 2n + 3 = 0$ $\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases}$

$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times (-1) \times 3 = 16 > 0$

L'équation admet deux solutions distinctes.

$n_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-4}{-2} = 3$

$n_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+4}{-2} = -1$ impossible car n doit être positif.

D'où le seul cas est le triangle dont les côtés mesurent 3, 4, 5