Première SS

Corrigé du contrôle
Suites et vecteurs

Fait le 11/12/17

1

Exercice 1 : /6

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{4}{3}u_n - 1 \\ u_0 = -1 \end{cases}$$

0,5 1) $u_1 = \frac{4}{3}u_0 - 1 = \frac{4}{3}\times(-1) - 1 = -\frac{4}{3} - \frac{3}{3} = \boxed{-\frac{7}{3}}$

0,5 $u_2 = \frac{4}{3}u_1 - 1 = \frac{4}{3}\times\left(-\frac{7}{3}\right) - 1 = -\frac{28}{9} - \frac{9}{9} = \boxed{-\frac{37}{9}}$

2) A l'aide de la calculatrice, en dressant un tableau de valeurs :

1 (u_n) semble décroissante et plus n augmente, plus u_n diminue.
$\left(\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty\right)$.

3) Voir la courbe.
Plus n augmente, plus les u_n se situent sur la gauche.
c'est en accord avec la conjecture sur la décroissance de (u_n)

1,5 De plus, plus n augmente, plus u_n diminue.
Ce qui semble correspondre à $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

4) $u_{n+1} - u_n = -4\times\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} + 3 - \left(-4\times\left(\frac{4}{3}\right)^n + 3\right)$

$= -4\times\left(\frac{4}{3}\right)^n \times \frac{4}{3} + 4\times\left(\frac{4}{3}\right)^n$

$= 4\times\left(\frac{4}{3}\right)^n \left[1 - \frac{4}{3}\right]$

2 $= 4\times\left(\frac{4}{3}\right)^n \times \left(-\frac{1}{3}\right)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Or, $4\times\left(\frac{4}{3}\right)^n > 0$, et $-\frac{1}{3} < 0$

D'où $u_{n+1} - u_n < 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$
c'est-à-dire (u_n) strictement décroissante.

Exercice (2) : /3 (2)

$m \in \mathbb{R}$ $E(-1;2)$ $F(0;3)$ $G(m^2;3m+1)$

$\overrightarrow{EF}(x_F - x_E ; y_F - y_E)$
$(1 ; 1)$

$\overrightarrow{EG}(x_G - x_E ; y_G - y_E)$
$(m^2+1 ; 3m+1-2)$
$(m^2+1 ; 3m-1)$

E, F et G alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ colinéaires

$\Leftrightarrow x_{\overrightarrow{EF}} \times y_{\overrightarrow{EG}} = y_{\overrightarrow{EF}} \times x_{\overrightarrow{EG}}$

$\Leftrightarrow 3m - 1 = m^2 + 1$

$\Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \times 2 \times 1 = 1 > 0$, l'équation admet 2 solutions distinctes

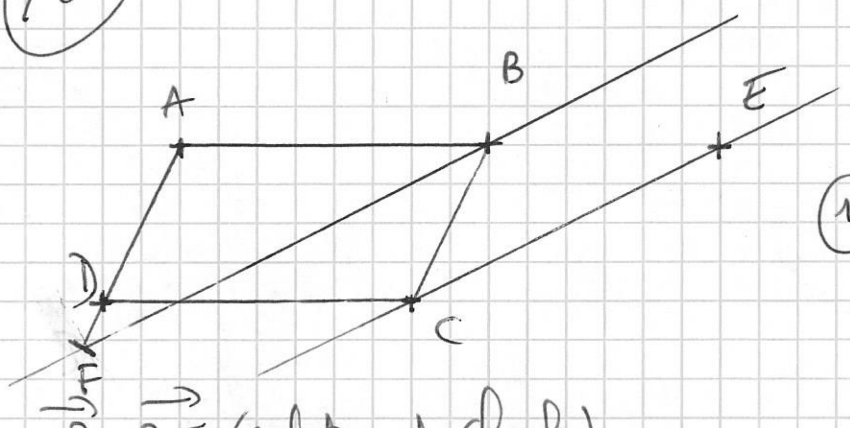
$m_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3+1}{2} = 2$

et $m_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3-1}{2} = 1$

Par conséquent, E, F et G alignés si et seulement si $m = 2$ ou $m = 1$

Exercice (3) : /6

1)
$\overrightarrow{BE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{DF} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$



1,5

2) a) $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE}$ (relation de Chasles)

1,5

$= \overrightarrow{DA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ (car ABCD parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$)

$= \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

b) $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DF}$ (rel. de Chasles) $= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ (rel de Chasles)

$\overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}$

$= -\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AD}$

1,5

3) $-\frac{4}{3}\overrightarrow{CE} = -\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\overrightarrow{AB} - \frac{4}{3}\times(-1)\overrightarrow{AD}$

$= -\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BF}$

1,5

c'est-à-dire : $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires

Par conséquent :

$(CE) // (BF)$

Exercice 4 : /5

$\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{EF} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

1) Dans $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$:

1

$\overrightarrow{AB} = 1\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AC}$, d'où B a pour coordonnées $(1\ ;0)$

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF}$ (relation de Chasles)

$= \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ 1

d'où F a pour coordonnées $\left(\frac{3}{5}\ ;\frac{2}{5}\right)$

$\overrightarrow{AC} = 0\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AC}$

d'où C a pour coordonnées $(0;1)$ 1

2) $\overrightarrow{BF}(x_F - x_B\ ; y_F - y_B)$ $\overrightarrow{BC}(x_C - x_B\ ; y_C - y_B)$

$\left(\frac{3}{5} - 1\ ; \frac{2}{5} - 0\right)$ $(0-1\ ; 1-0)$

$\left(-\frac{2}{5}\ ; \frac{2}{5}\right)$ $(-1\ ; 1)$

$\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}\left(-\frac{2}{5}\ ; \frac{2}{5}\right)$, or $\overrightarrow{BF}\left(-\frac{2}{5}\ ; \frac{2}{5}\right)$ 2

d'où $\frac{2}{5}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BF}$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{BC}$ colinéaires

or, ils ont un point en commun

Donc B, F et C sont alignés