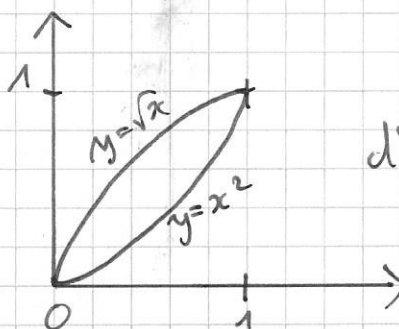


Exercice 1 (3)

1) $x \in [0; 1]$:



d'où $x^2 \leq \sqrt{x}$

$(\Rightarrow) \sqrt{x} - x^2 \geq 0$

(réponse (A))

$\sqrt{x} - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq x^2$

$\Leftrightarrow -\sqrt{x} \leq -x^2$

$\Leftrightarrow \underline{1 - \sqrt{x} \leq 1 - x^2}$ (réponse (D))

(1)

2) $f(x) = \sqrt{-x-10}$

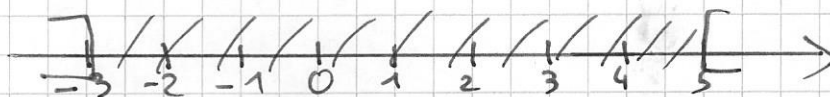
$-x-10 \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

d'où f est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$

(réponse (D))

(0,5)

3) $x \in]-3; 5[$



$|x| = |x-0|$: distance entre x et 0

$|x| < 5$ (réponse (C))

(0,5)

On peut trouver des contre-exemples pour les 3 autres propositions.

4) $E(x) = (x^2 - x + 1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$ ou $x+1 = 0$

$x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

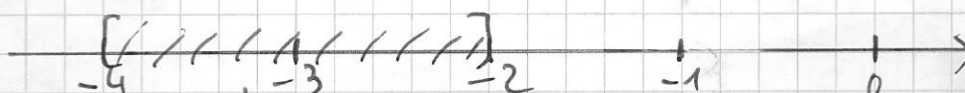
$x^2 - x + 1 = 0$: $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 < 0$, d'où pas de solution réelle.

Donc $E(x) = 0$ admet une unique solution

(réponse (B))

(0,5)

5) $-4 \leq x \leq -2$



On a: $|x-1|$: distance entre x et 1

$|x-1| = |x| + 1$ (réponse (D))

(0,5)

Exercice ②: (5,5)

②

$$AB = 4 \text{ m}, BC = 8 \text{ m}, CH = x$$

1) CHIJ est un carré

d'où en particulier $CH = CJ = x$

or, $0 \leq CH \leq 8$ et $0 \leq CJ \leq 4$

Donc $x \in [0; 4]$

2) Aire (surface non fleurie) = Aire (ABCD) - Aire (AEGF) - Aire (CHIJ)

$$\begin{aligned} &= 4 \times 8 - (4-x)^2 - x^2 \\ &= 32 - 16 + 8x - x^2 - x^2 \\ &= -2x^2 + 8x + 16 \end{aligned}$$

①

3) On a montré que Aire (surface non fleurie) = $-2x^2 + 8x + 16$
c'est un trinôme du second degré

de la forme $ax^2 + bx + c$, avec $a = -2 < 0$

Il admet son maximum en $x = x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{-8}{2 \times (-2)}$

$$= 2$$

1,5

Pour $x = 2 \text{ m}$, l'aire de la surface non fleurie est maximale.

4) Aire (Parcelle ABCD) = $4 \times 8 = 32 \text{ m}^2$

$$\begin{aligned} \text{Aire (partie fleurie)} &= \text{Aire (Parcelle ABCD)} - \text{Aire (surf. non fleurie)} \\ &= 32 - (-2x^2 + 8x + 16) \\ &= 2x^2 - 8x + 16 \end{aligned}$$

2,5

$$2x^2 - 8x + 16 = \frac{7}{8} \times 32$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 16 = 28$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 8x - 12 = 0 \quad \begin{cases} a=2 \\ b=-8 \\ c=-12 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-8)^2 - 4 \times 2 \times (-12) = 64 + 96 = 160 > 0$$

Nous l'équation admet 2 solutions distinctes.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 + \sqrt{160}}{4} = \frac{8 + 4\sqrt{10}}{4} = 2 + \sqrt{10}$$

$$x_2 = \frac{-6 - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 - \sqrt{16 \times 10}}{4} = \frac{8 - 4\sqrt{10}}{4} = 2 - \sqrt{10}$$

(3)

$$\text{Or, } x \in [0; 4]$$

$$\text{et } 2 - \sqrt{10} \notin [0; 4]$$

$$2 + \sqrt{10} \notin [0; 4]$$

Il n'existe donc aucune valeur de x dans $[0; 4]$ pour que la surface fleuvée représente $\frac{7}{8}$ de la surface de la parcelle totale

Exercice (3'): (16)

$$1) \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$a) \quad \text{sur } [0; +\infty[, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

Soient $a, b \in [0; +\infty[$, tels que $a < b$

$$a+1 < b+1$$

(1,5)

d'où $0 < \sqrt{a+1} < \sqrt{b+1}$ car $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

or, $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

$$\text{d'où: } \frac{1}{\sqrt{a+1}} > \frac{1}{\sqrt{b+1}} \Leftrightarrow g(a) > g(b)$$

Donc: g strictement décroissante sur $[0; +\infty[$

$$b) \quad u_{n+1} = g(n+1) \text{ et } u_n = g(n)$$

(1)

$$\text{or, } n \in \mathbb{N} \text{ avec } n < n+1$$

D'après 1a), g strictement décroissante sur $[0; +\infty[$

$$\text{d'où } g(n+1) < g(n) \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Donc: (u_n) strictement décroissante.

2) a) $n=3$ - Il y aura 3 passages dans la boucle Pour
1^{er} passage: $v = \frac{1}{\frac{1}{2}} + 1 = 2 + 1 = 3$

- 2^{ème} passage: $v = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$

(1)

- 3^{ème} passage: $v = \frac{1}{\frac{4}{3}} + 1 = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}$

Alors, l'algorithme affiche $\frac{7}{4}$

b) $v_0 = \frac{1}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{1}{v_n} + 1$ (d'après l'algorithme)

(0,75)

c) On a: $f(x) = \frac{1}{x} + 1$

(0,25)

d) Voir le graphique

(1,5)

Exercice (4):

(3,5)

d_m d'équation: $(m+1)x + (1-2m)y + 3 = 0$

1) $A(2, -3) \in d_m \Leftrightarrow 2(m+1) - 3(1-2m) + 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2m + 2 - 3 + 6m + 3 = 0$

$\Leftrightarrow 8m = -2$

$\Leftrightarrow m = -\frac{2}{8} = \boxed{-\frac{1}{4}}$

2) $\Delta: 5x - 7y - 6 = 0$ $\begin{cases} a = 5 \\ b = -7 \\ c = -6 \end{cases}$

$\vec{u} \left(-\underset{7}{b}; \underset{5}{a} \right)$ est un vecteur directeur de Δ

Pour d_m : $\begin{cases} a = m+1 \\ b = 1-2m \\ c = 3 \end{cases}$

(2) $\vec{v} (2m-1; m+1)$ est un vecteur directeur de d_m

$d_m \parallel \Delta \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow x_{\vec{u}} \times y_{\vec{v}} = y_{\vec{u}} \times x_{\vec{v}}$

$\Leftrightarrow 7 \times (m+1) = 5 \times (2m-1)$

$\Leftrightarrow 7m - 10m = -5 - 7$

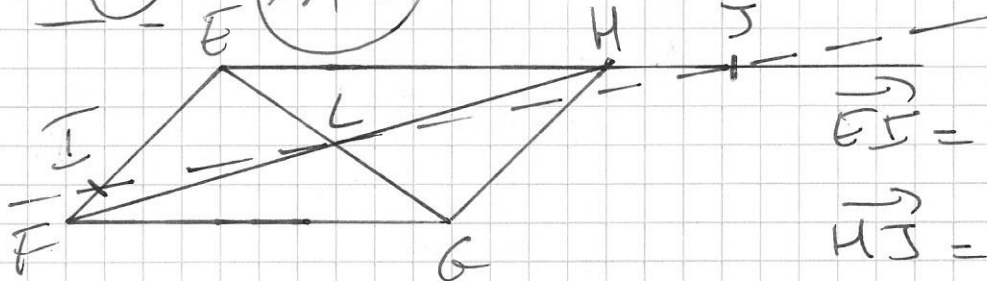
$\Leftrightarrow -3m = -12 \Leftrightarrow \boxed{m = 4}$

Exercice (5):

(5)

1)

(0,5)



$$\vec{EI} = \frac{4}{5} \vec{EF}$$

$$\vec{HJ} = \frac{1}{3} \vec{EH}$$

2) EFGH est un parallélogramme non aplati.

(0,5)

$\vec{FG}$ et $\vec{FE}$ ne sont pas colinéaires

De plus, $\vec{FG}$ et $\vec{FE}$ ont la même origine: le point F.

3) Dans $(F; \vec{FG}, \vec{FE})$:

$$\vec{EI} = \vec{EF} + \vec{FI} \text{ (relation de Chasles)}$$

$$\text{d'où } \vec{EF} + \vec{FI} = \frac{4}{5} \vec{EF}$$

$$\Rightarrow \vec{FI} = \frac{4}{5} \vec{EF} - \vec{EF} = -\frac{1}{5} \vec{EF} = \frac{1}{5} \vec{FE}$$

(c'est-à-dire: $\vec{FI} = 0 \vec{FG} + \frac{1}{5} \vec{FE}$)

(3,9)

Donc: I a pour coordonnées $(0; \frac{1}{5})$

L est le centre du parallélogramme:

$$\vec{FL} = \frac{1}{2} \vec{FH} = \frac{1}{2} (\vec{FG} + \vec{FE}) = \frac{1}{2} \vec{FG} + \frac{1}{2} \vec{FE}$$

Donc: L a pour coordonnées $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$

$$\vec{FJ} = \vec{FH} + \vec{HJ} \text{ (relation de Chasles)}$$

$$= \vec{FG} + \vec{FE} + \frac{1}{3} \vec{EH}$$

$$= \vec{FG} + \vec{FE} + \frac{1}{3} \vec{FG} \text{ (car EFGH est un parallélogramme } \Rightarrow \vec{EH} = \vec{FG})$$

$$= \frac{4}{3} \vec{FG} + \vec{FE}$$

donc J a pour coordonnées $(\frac{4}{3}; 1)$

4) $\vec{IL} \left(x_L - x_I; y_L - y_I \right) \left(\frac{1}{2} - 0; \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right)$ d'où $\vec{IL} \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{10} \right)$

$$\vec{IJ} \left(x_J - x_I; y_J - y_I \right) \\ \left(\frac{4}{3} - 0; 1 - \frac{1}{5} \right) \\ \left(\frac{4}{3}; \frac{4}{5} \right)$$

$$\begin{aligned} x_{\vec{IL}} \times y_{\vec{IJ}} &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{5} \\ y_{\vec{IL}} \times x_{\vec{IJ}} &= \frac{3}{10} \times \frac{4}{3} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{d'où } \vec{IL} \text{ et } \vec{IJ} \text{ sont} \\ \text{colinéaires avec un produit} \\ \text{commun,} \end{array} \right\}$$

donc I, L et J sont alignés

5) a) Dans le repère $(F; \vec{FG}, \vec{FE})$:

$$\vec{FE} = 0 \vec{FG} + 1 \vec{FE}$$

d'où F a pour coordonnées $(0; 1)$
 $\vec{FG} = 1 \vec{FG} + 0 \vec{FE}$

d'où G a pour coordonnées $(1; 0)$ (1,25)

d'où: $\vec{EG}(1; -1)$

Soit $M(x; y) \in (EG)$

$\vec{EM}(x - 0; y - 1)$, c'est un vecteur directeur de (EG)
 $(x; y - 1).$

$\vec{EM}$ et $\vec{EG}$ sont des vecteurs directeurs de la droite (EG)
Ils sont donc colinéaires.

$$x_{\vec{EM}} \times y_{\vec{EG}} = y_{\vec{EM}} \times x_{\vec{EG}}$$

$$\Leftrightarrow x \times (-1) = (y - 1) \times 1$$

$\Leftrightarrow -x - y + 1 = 0$ est une équation cartésienne
de la droite (EG)

b) $\vec{IJ} \left(\frac{4}{3}; \frac{4}{5} \right)$ est un vecteur directeur de (IJ)

Soit $M(x; y) \in (IJ)$

$\vec{IM} \left(x - 0; y - \frac{1}{5} \right)$
 $\left(x; y - \frac{1}{5} \right)$

$\vec{IM}$ et $\vec{IJ}$ sont colinéaires:

$$\Leftrightarrow x \vec{IM} \times y \vec{IJ} = y \vec{IM} \times x \vec{IJ}$$

$$\Leftrightarrow x \times \frac{4}{5} = (y - \frac{1}{5}) \times \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{5}x - \frac{4}{3}y + \frac{4}{15} = 0 \quad (\times 15)$$

$$\Leftrightarrow 12x - 20y + 4 = 0$$

$\Leftrightarrow 3x - 5y + 1 = 0$ est une équation cartésienne de (IJ).

c) (IJ): $3x - 5y + 1 = 0$ — $\vec{IJ}$ et $\vec{EG}$ ne sont pas colinéaires:
(EG): $-x - y + 1 = 0$

Pour obtenir les coordonnées du point d'intersection entre (IJ) et (EG), on va résoudre le système suivant: (IJ) et (EG) sont sécantes.

$$\begin{cases} 3x - 5y + 1 = 0 \\ -x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ -x - y = -1 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow 3L_2 + L_1$$

(2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ -8y = -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -1 + \frac{5}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

or, $L(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$

donc $L \in (IJ)$ (en particulier)

Par conséquent: L_1 , L et J sont alignés

Exercice 6: (M)

1) a) $x = AM$

$AB = 10$, $M \in [AB]$, alors $0 \leq x \leq 10$

$Aire(AMC) = x^2$

$Aire(MBEF) = MB^2$

(0,75)

or, $MB = 10 - x$

d'où $Aire(MBEF) = (10 - x)^2$

$= 100 - 20x + x^2$

b) On a $f(x) = Aire(AMC) + Aire(MBEF)$

$= x^2 + x^2 - 20x + 100$

(1)

Donc $f(x) = 2x^2 - 20x + 100$

c) $f(x) = 2(x^2 - 10x) + 100$

$= 2[(x - 5)^2 - 25] + 100$

(1,25)

Donc $f(x) = 2(x - 5)^2 + 50$ (Forme canonique de f)

d) $a = 2 > 0$, d'où f est décroissante, puis croissante.

f atteint son minimum en $x = x = 5$ avec $5 \in [0, 10]$

(1)

Donc si M est à 5 unités de A , la somme des aires des 2 carrés est minimum.

2) $Aire(\text{disque de diamètre } [AM]) = \pi \times \left(\frac{AM}{2}\right)^2$

$= \pi \times \frac{x^2}{4}$

$Aire(\text{disque de diamètre } [MB]) = \pi \times \left(\frac{MB}{2}\right)^2$

$= \pi \times \left(\frac{10 - x}{2}\right)^2$

$= \pi \times \frac{(10 - x)^2}{4}$

(3,5)

$$\text{Aire (disque de diamètre [AM])} + \text{Aire (disque de diamètre [MB])} \quad (9)$$

$$= \frac{\pi}{4} x^2 + \frac{\pi}{4} (100 - 20x + x^2)$$

$$= \frac{\pi}{4} [2x^2 - 20x + 100]$$

$$= \frac{\pi}{4} f(x)$$

or, f atteint son minimum en $x = 5$ (question 1 d))
C'est donc la même chose pour la somme des aires des 2 disques.

Voir figure.

$$3) \text{ Aire (carré de côté [AM])} = x^2$$

$$\text{Aire (disque de diamètre [MB])} = \pi \times \left(\frac{MB}{2}\right)^2$$

$$= \pi \times \frac{1}{4} (10-x)^2$$

d'où :

$$\text{Aire (carré de côté [AM])} + \text{Aire (disque de diamètre [MB])}$$

$$= x^2 + \pi \times \frac{1}{4} (10-x)^2$$

$$= x^2 + \pi \times \frac{1}{4} (100 - 20x + x^2)$$

$$= \frac{\pi+4}{4} x^2 - 5\pi x + 25\pi$$

Trinôme du second degré avec $a = \frac{\pi+4}{4} > 0$

$$\text{il atteint son minimum en } x = -\frac{b}{2a} = \frac{5\pi}{\frac{\pi+4}{2}} = 5\pi \times \frac{2}{\pi+4} = \frac{10\pi}{\pi+4}$$

$$\text{or, rayon du disque} = \frac{10-x}{2}$$

$$= \frac{10 - \frac{10\pi}{\pi+4}}{2} = \frac{\frac{10(\pi+4) - 10\pi}{\pi+4}}{2} = \frac{\frac{40}{\pi+4}}{2} = \boxed{\frac{20}{\pi+4}}$$

Lorsque le rayon du disque vaut $\frac{20}{\pi+4}$, la somme des aires est minimum.

Exercice Bonus: (+3)

10

1) $p_4 = \underline{6}$ (voir la 3^{ème} figure). (0,25)

$$p_5 = p_4 + 4 = \underline{10} \quad (0,5)$$

$$p_6 = p_5 + 5 = \underline{15} \quad (0,5)$$

2) n points étant placés :

Dès qu'on ajoute un point supplémentaire, on peut à nouveau tracer n segments en plus. (0,5)

Donc:
$$p_{n+1} = p_n + n$$

3) Tant que $\boxed{p < 120}$ faire (0,5)
 $\boxed{p+n} \rightarrow p$ (0,5)
 $n+1 \rightarrow n$
Fin
Sortie: Afficher $\boxed{n}$ (0,25)