1

Première 5S

Devoir d'entraînement (Fait le 07/04/17)
(Préparation du bac blanc)

Exercice 1:

$a_0 = 100$

1) A chaque anniversaire, elle augmente ses versements de 2 %

Alors : $\begin{cases} a_{n+1} = 1,02 \times a_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \\ a_0 = 100 \end{cases}$

D'où (a_n) est une suite géométrique de raison 1,02 et de premier terme $a_0 = 100$

D'où $a_n = a_0 \times q^n = 100 \times 1,02^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

2) $S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$

$= 1^{er}$ terme $\times \dfrac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$

$= 100 \times \dfrac{1 - 1,02^{n+1}}{1 - 1,02}$

$= \dfrac{100}{0,02} \times (1,02^{n+1} - 1)$

$S_n = 5000(1,02^{n+1} - 1)$

3) a) b)

Tant que $\boxed{S < 1999}$ Faire
n prend la valeur n+1
a prend la valeur $\boxed{a \times 1,02}$
S prend la valeur S $\boxed{+a}$
Fin Tant que
Afficher $\boxed{n}$

a) Soit en programmant l'algorithme précédent, soit en utilisant la

calculatrice.
On trouve $n = 16$
Il pourra s'offrir la guitare à 16 ans

Exercice 2 :

Partie A :

$u(x) = x^3 - \frac{9}{2}$ sur $[1;2]$

1) u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, d'où en particulier sur $[1;2]$ car c'est une fonction polynome.
$u'(x) = 3x^2 > 0$, pour tout $x \in [1;2]$

2) D'où le tableau de variations de u :

x	1		2
signe de $u'(x)$		$+$	
variation de u	$-\frac{7}{2}$	$\nearrow$	$\frac{7}{2}$

$u(1) = 1 - \frac{9}{2}$
$= -\frac{7}{2}$
$u(2) = 2^3 - \frac{9}{2}$
$= 8 - \frac{9}{2}$
$= \frac{16 - 9}{2} = \frac{7}{2}$

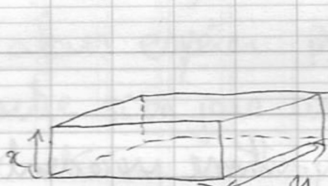
3) D'après l'étude des variations de u,
u est strictement croissante sur $[1;2]$ avec $u(1) = -\frac{7}{2}$
et $u(2) = \frac{7}{2}$

Donc : il y a un seul $\alpha \in [1;2]$, tel que $u(\alpha) = 0$
A la calculatrice : on trouve $\alpha \simeq 1,7$

4) Signe de u :

x	1		α		2
signe de u		$-$	0	$+$	

Partie B :

1) 

$V = x \times y \times 2x = 2x^2 y = 12$

$\Leftrightarrow \boxed{y = \frac{12}{2x^2}} = \boxed{\frac{6}{x^2}}$

2) a) Sur $[1;2]$:

$S(x) = x \times 2x \times 2 + y \times x \times 2 + 2x\, y \times 2$

$= 4x^2 + 2x \times \frac{6}{x^2} + 4x \times \frac{6}{x^2}$

$= 4x^2 + \frac{12}{x} + \frac{24}{x}$

Donc $S(x) = 4x^2 + \frac{36}{x}$

b) S est dérivable partout où elle est définie donc en particulier sur $[1;2]$

$S'(x) = 4 \times 2x - \frac{36}{x^2} = 8x - \frac{36}{x^2}$

$S'(x) = \frac{8x^3 - 36}{x^2} = \frac{8\left(x^3 - \frac{36}{8}\right)}{x^2} = \frac{8\left(x^3 - \frac{9}{2}\right)}{x^2}$

Or, $x^2 > 0$ sur $[1;2]$

D'où S' est du signe de $x^3 - \frac{9}{2}$

3) a) D'après la partie A, $x^3 - \frac{9}{2} \geq 0$, pour $x \in [\alpha;2]$
et $x^3 - \frac{9}{2} < 0$, pour $x \in [1;\alpha[$

D'où $S'(x) \geq 0$, pour $x \in [\alpha;2]$
et $S'(x) < 0$, pour $x \in [1;\alpha[$

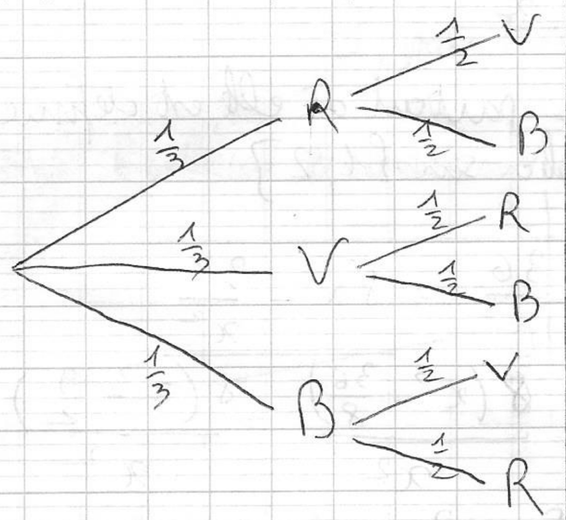
b) Tableau de variations de S : $S(\alpha) \simeq 32,7$

x	1		α		2
signe de $S'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de S	40	$\searrow$		$\nearrow$	34

4) a) En $x = \alpha$ ($\simeq 1,7$), la dérivée de S s'annule et change de signe.
S(α) est donc un extremum local.
D'après les variations, c'est un minimum.
Donc pour $x \simeq 1,7$ cm, S est alors minimale

b) Dimensions de la boîte correspondante : 1,7cm ; $\frac{6}{1,7^2}$; 3,4 cm
1,7cm ; 2,1cm ; 3,4cm

Exercice 3 :
1) Modélisons cette situation à l'aide d'un arbre pondéré :



Issues	Gain
{RV}	−2
{RB}	−1
{VR}	−2
{VB}	1
{BV}	1
{BR}	−1

2) Valeurs prises par X : $\{-2 ; -1 ; 1\}$
a) Loi de probabilité :

k	-2	-1	1
$P(X=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

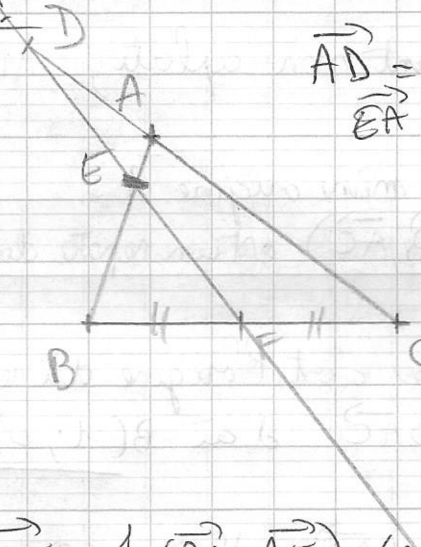
b) $E(X) = -2 \times \frac{1}{3} \cancel{- 1 \times \frac{1}{3}} \cancel{+ \frac{1}{3}}$

$= -\frac{2}{3} < 0$ le jeu est donc défavorable au joueur
On peut alors espérer perdre environ 0,67 pts en moyenne par partie si on joue un grand nombre de fois

Exercice 4 :

$\vec{AD} = -\frac{1}{2}\vec{AC}$ F milieu de [BC]

$\vec{EA} = \frac{1}{3}\vec{BE}$



1) $\vec{EA} = \frac{1}{3}\vec{BE} = \frac{1}{3}(\vec{BA}+\vec{AE})$ (relation de Chasles)

$= \frac{1}{3}\vec{BA} + \frac{1}{3}\vec{AE}$

d'où $\vec{EA} + \frac{1}{3}\vec{EA} = \frac{1}{3}\vec{BA}$

$\Leftrightarrow \frac{4}{3}\vec{EA} = \frac{1}{3}\vec{BA} \Leftrightarrow \underline{\vec{EA} = \frac{1}{4}\vec{BA}}$

2) Voir figure ci-dessus

3) Methode 1 :

a) $\vec{EF} = \vec{EA} + \vec{AB} + \vec{BF}$ (relation de Chasles)

$= \frac{1}{4}\vec{BA} + \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC}$ (car $\vec{EA} = \frac{1}{4}\vec{BA}$ et F milieu de [BC])

$= -\frac{1}{4}\vec{AB} + \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{AC}$

$= \frac{3}{4}\vec{AB} - \frac{2}{4}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$

Donc : $\underline{\vec{EF} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}}$

$\vec{DF} = \vec{DA} + \vec{AC} + \vec{CF}$ (relation de Chasles)

$= \frac{1}{2}\vec{AC} + \vec{AC} + \frac{1}{2}(\vec{CA} + \vec{AB})$

$\underline{\vec{DF} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AC}}$

b)

On a $\frac{1}{2}\vec{DF} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} = \vec{EF}$

D'où $\vec{DF}$ et $\vec{EF}$ sont colinéaires avec un point commun, donc $\underline{D, E \text{ et } F \text{ alignés}}$

4) Méthode 2 :

a) ABC étant non aplati, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires

De plus, ils ont la même origine A.

Donc $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère du plan.

b) $A(0;0)$ car c'est l'origine du repère

$\overrightarrow{AB} = 1\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AC}$ d'où $B(1;0)$

$\overrightarrow{AC} = 0\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AC}$ d'où $C(0;1)$

$\overrightarrow{AD} = 0\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ d'où $D(0;-\frac{1}{2})$

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AC}$ d'où $E(\frac{1}{4};0)$

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$
(relation de Chasles)

$= \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ d'où $F(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$

c) $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{DE}(\frac{1}{4};\frac{1}{2}) \\ \overrightarrow{DF}(\frac{1}{2};1)\end{array}\right\}$ $\frac{1}{2}\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DE}$

donc $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{DE}$ colinéaires avec un point commun.

Donc D, E et F sont alignés

Exercice 5 : $A(5;-3)$ $B(-2;1)$ $C(0;-\frac{1}{7})$ $D(-1;6)$

1)

$\overrightarrow{AB}(-7;4)$ $\overrightarrow{AC}(-5;-\frac{1}{7}+3)$ $\overrightarrow{AC}(-5;\frac{20}{7})$

On a : $\left.\begin{array}{l} x_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{AC}} = -7 \times \frac{20}{7} = -20 \\ \text{et } y_{\overrightarrow{AB}} \times x_{\overrightarrow{AC}} = 4 \times (-5) = -20 \end{array}\right\}$ $x_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{AC}} = y_{\overrightarrow{AB}} \times x_{\overrightarrow{AC}}$

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires avec un point commun. Donc A, B et C sont alignés

2) a) $\overrightarrow{AB}\,(-7;4)$

Soit $M(x;y) \in (AB)$:

$\overrightarrow{AM}\,(x-5;y+3)$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow -7(y+3) = 4(x-5)$

$\Leftrightarrow 4x+7y-20+21=0$

$\Leftrightarrow \underline{4x+7y+1=0}$ (Equation cartésienne de la droite (AB))

b)

Soit $C\left(0;-\frac{1}{7}\right)$

Montrons que $C \in (AB)$:

$4\times x_C + 7y_C + 1 = 4\times 0 + 7\times\left(-\frac{1}{7}\right)+1$

$= -1+1$

$= 0$ donc $\underline{C \in (AB)}$

(c'est-à-dire, A, B et C sont alignés)

3) $x_E = \frac{3}{2}$

comme $E \in (AB)$, alors :

$4x_E + 7y_E + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 4\times\frac{3}{2} + 7y_E + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 7y_E = -1-6 = -7$

$\Leftrightarrow y_E = \frac{-7}{7} = -1$

Donc $\underline{E\left(\frac{3}{2};-1\right)}$

4) $(d) \parallel (AB)$ d'où $\overrightarrow{AB}$ vecteur directeur de (d)

avec $\overrightarrow{AB}(-7;4)$

Soit $M(x;y) \in (d)$, comme $D \in (d)$

$\overrightarrow{DM}$ est un vecteur directeur de (d).

$\overrightarrow{DM}\,(x+1;y-6)$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DM}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow x_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{DM}} = y_{\overrightarrow{AB}} \times x_{\overrightarrow{DM}}$

D'où : $-7(y-6) = 4(x+1)$

$\Leftrightarrow \underline{4x + 7y - 38 = 0}$ (Équation cartésienne de (d))

5) La médiane issue de C du triangle ABC passe par le milieu de [AB]

Soit M milieu de [AB] :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{5+(-2)}{2} = \frac{3}{2} \qquad \text{d'où } M\left(\frac{3}{2} ; -1\right)$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-3+1}{2} = -1$$

$\vec{CM}\left(\frac{3}{2} ; -1 + \frac{1}{7}\right)$ $\qquad$ $\vec{CM}\left(\frac{3}{2} ; -\frac{6}{7}\right)$

Soit $N(x ; y) \in (CM)$:

$\vec{CN}\left(x ; y + \frac{1}{7}\right)$

$\vec{CM}$ et $\vec{CN}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \frac{3}{2}\left(y + \frac{1}{7}\right) = -\frac{6}{7}x$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{7}x + \frac{3}{2}y + \frac{3}{14} = 0$$

$$\Leftrightarrow 12x + 21y + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{4x + 7y + 1 = 0}$$

Équation cartésienne de la médiane issue de C du triangle ABC.