

Première S

Corrigé du Parc Blanc
(Avril 2014)

(1)
(Faut 6 27/10/14)

Exercice (1): (1/4,5)

Partie (A)

(0,75)

1) a) $f(2) = y_A = 20$, $f(4) = y_B = 16$, $f(8) = y_C = 20$

b) $f'(2)$ = coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2

$$f'(2) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{20 - 32}{2 - 0} = \frac{-12}{2} = \boxed{-6}$$

(0,75)

$f'(4)$: coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 4.

$$f'(4) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0 \text{ car la tangente en question est horizontale.}$$

$f'(8)$: coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 8

$$f'(8) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{26 - 20}{12 - 8} = \frac{6}{4} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

2) Soit (T_2) : tangente à la courbe f au point d'abscisse 2.

$$(T_2): y = f'(2)(x - 2) + f(2)$$

(0,5)

Or, d'après la question 1), $f(2) = 20$ et $f'(2) = -6$.
D'où:

$$(T_2): y = -6(x - 2) + 20 = \underline{\underline{-6x + 32}}$$

(T_2) a pour équation réduite: $\underline{\underline{y = -6x + 32}}$

Partie (B):

0,25

1) On a $xy = 8$ (Aire d'un rectangle)
 $\Rightarrow y = \frac{8}{x}$

2) $f(x)$ = périmètre de la figure complète

0,25

$$\begin{aligned} f(x) &= 2y + x + 2x + y + y - x \\ &= 4y + 2x \\ &= 4 \times \frac{8}{x} + 2x = 2x + \frac{32}{x} = f(x) \end{aligned}$$

3) f est dérivable sur $]0; +\infty[$ (dit dans l'énoncé)

0,75

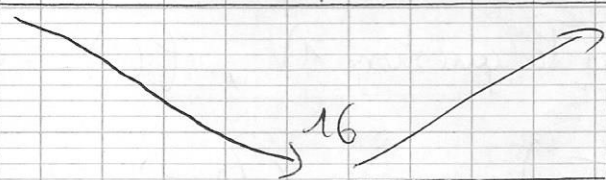
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 - \frac{32}{x^2} = \frac{2x^2 - 32}{x^2} = \frac{2(x^2 - 16)}{x^2} \\ f'(x) &= \frac{2(x+4)(x-4)}{x^2} \end{aligned}$$

4) Sur $]0; +\infty[$, $x^2 > 0$
 et $x+4 > 4 > 0$

N'ai le signe de $f'(x)$ ne dépend que de celui de $x-4$
 $x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$

N'ai les variations de f sur $]0; +\infty[$:

0,75

x	0	4	$+\infty$
signe de $f'(x)$		-	+
Variations de f			

$$\begin{aligned} f(4) &= 2 \times 4 + \frac{32}{4} \\ &= 8 + 8 \\ &= 16 \end{aligned}$$

0,5

5) En $x=4$, la dérivée de f s'annule et change de signe.
 Il y a donc un extremum local pour f en $x=4$.
 D'après les variations, c'est un minimum local.

Par conséquent:

Pour $x=4$ cm, le périmètre est minimal et vaut 16 cm

Exercice (2):

4

1)

	Vin en supplément	Pas de vin	Total
Menu "express"	142	18	160
Menu du jour	16	24	40
Total	58	42	100

$$\frac{70}{100} \times 60 = 42$$

$$40 \times \frac{40}{100} = 16$$

①

2)

②,5

a) Valeurs prises par D = {12; 15; 14; 17}

b) Loi de probabilité de D:

①

	/	/	/	/	/	/	/	/
R	12	15	14	17				
P(D=R)	0,18	0,24	0,42	0,16				

$$P(D=12) = \frac{18}{100} = 0,18$$

$$P(D=15) = \frac{24}{100} = 0,24$$

$$P(D=14) = \frac{42}{100} = 0,42$$

$$P(D=17) = \frac{16}{100} = 0,16$$

$$c) E(D) = \sum R \times P(D=R)$$

$$R \in \{12, 15, 14, 17\}$$

$$= 12 \times 0,18 + 15 \times 0,24 + 14 \times 0,42 + 17 \times 0,16$$

$$= 14,36$$

②,5

Un client peut espérer payer 14,36 € en moyenne.

d)

$$\text{Recette qu'il peut espérer obtenir} = 200 \times E(D)$$

$$= 200 \times 14,36$$

$$= 2872$$

②,5

Il peut espérer obtenir 2872 € par semaine

3)

Soit X: la nouvelle variable aléatoire = dépense en euros par client

$$\text{On a: } X = 1,1 \times D$$

②,5

$$\text{d'où } E(X) = E(1,1 \times D) = 1,1 \times E(D) = 1,1 \times 14,36$$

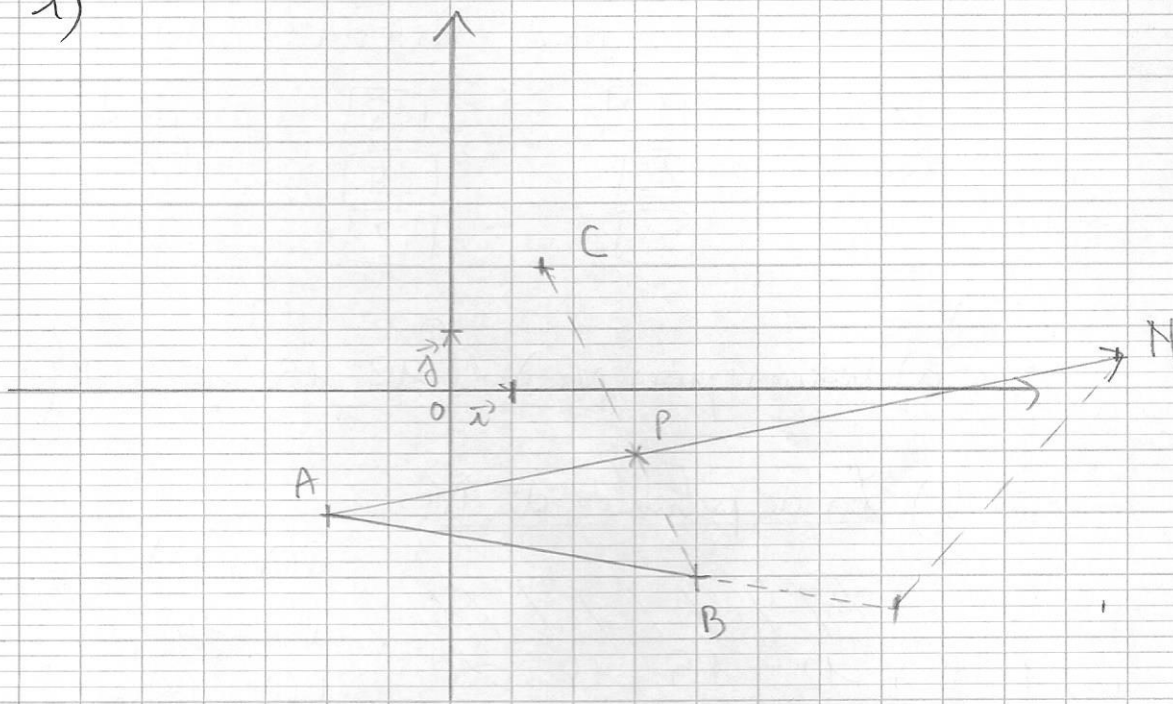
$$\approx 15,80$$

La dépense moyenne par client serait d'environ 15,80 €

Exercise (3): $A(-2; -2), B(4; -3), C(\frac{3}{2}; 2)$

1)

0,5



2) $3\vec{PB} + 2\vec{PC} = \vec{0}$

a) $3\vec{PB} + 2(\vec{PB} + \vec{BC}) = \vec{0}$ (relation de Chasles)

$\Rightarrow 5\vec{PB} = -2\vec{BC}$

$\Rightarrow 5\vec{BP} = 2\vec{BC}$

$\Rightarrow \vec{BP} = \frac{2}{5}\vec{BC}$

0,25

b) Voir la figure ci-dessus.

c) Il semblerait que: A, P et N soient alignés

3) Comme $\vec{AN} = \frac{3}{2}\vec{AB} + \vec{AC}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_N - x_A = \frac{3}{2}(x_B - x_A) + x_C - x_A \\ y_N - y_A = \frac{3}{2}(y_B - y_A) + y_C - y_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_N = \frac{3}{2}(4+2) + \frac{3}{2} + 2 - x \\ y_N = \frac{3}{2}(-3+2) + 2 + x - 2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_N = 4 + \frac{3}{2} = \frac{11}{2} \\ y_N = -\frac{3}{2} + 2 = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_N = \frac{11}{2} \\ y_N = -\frac{3}{2} + 2 = \frac{1}{2} \end{cases}$

donc $N(\frac{11}{2}; \frac{1}{2})$

1

5

Comme $\vec{BP} = \frac{2}{5} \vec{BC}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_P - x_B = \frac{2}{5} (x_C - x_B) \\ y_P - y_B = \frac{2}{5} (y_C - y_B) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_P = \frac{2}{5} \left(\frac{3}{2} - 4 \right) + 4 \\ y_P = \frac{2}{5} (2 + 3) - 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_P = \frac{2}{5} \times \left(-\frac{5}{2} \right) + 4 \\ y_P = \frac{2}{5} \times 5 - 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_P = -1 + 4 = 3 \\ y_P = 2 - 3 = -1 \end{cases} \text{ Donc } \boxed{P(3; -1)}$$

4) $\vec{AN} (x_N - x_A; y_N - y_A)$ $\vec{AP} (x_P - x_A; y_P - y_A)$
 $\left(\frac{2}{2} + 2; \frac{1}{2} + 2 \right)$ $(3 + 2; -1 + 2)$
 $\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2} \right)$ $(5; 1)$

0,75

or, $\frac{5}{2} \vec{AP} = \vec{AN}$, d'où $\vec{AN}$ et $\vec{AP}$ sont colinéaires avec un point commun.

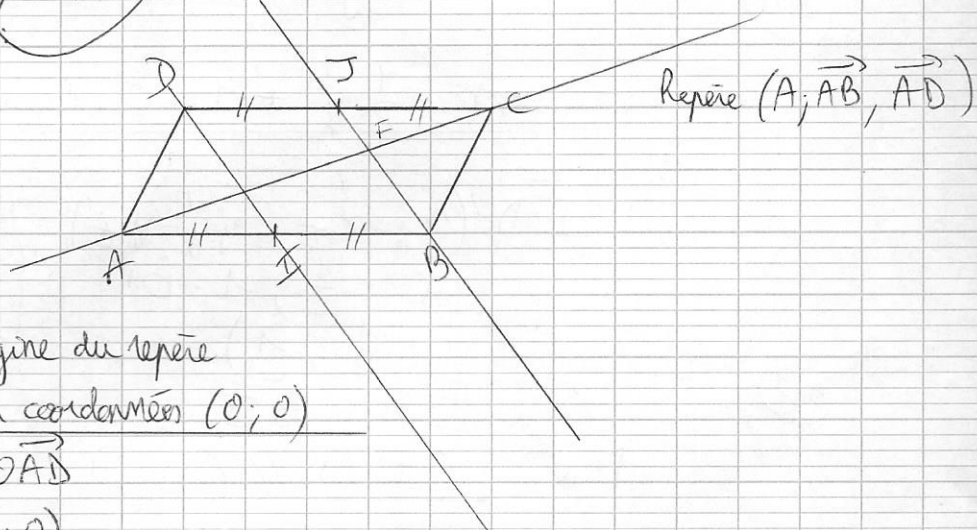
Donc A, N et P sont alignés

Exercice (4):

4,5

1) Figure

0,5



2) a) A est l'origine du repère
d'où A a pour coordonnées (0; 0)
 $\vec{AB} = 1\vec{AB} + 0\vec{AD}$
d'où B(1; 0)

(6)

$$\vec{AD} = 0\vec{AB} + 1\vec{AB} \quad \text{d'où } \underline{D(0;1)}$$

(0,5)

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} \quad (\text{relation de Chasles})$$

or, ABCD est un parallélogramme, d'où $\vec{AD} = \vec{BC}$

Donc:

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} \quad \text{d'où } \underline{C(1;1)}$$

(1)

$$b) \text{ I milieu de } [AB] : \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0+0}{2} = 0 \end{cases} \quad \text{donc: } \boxed{I(\frac{1}{2}; 0)}$$

$$\text{J milieu de } [DC] : \begin{cases} x_J = \frac{x_D + x_C}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} \\ y_J = \frac{y_D + y_C}{2} = \frac{1+1}{2} = 1 \end{cases} \quad \text{donc: } \boxed{J(\frac{1}{2}; 1)}$$

$$3) a) \vec{BJ} (x_J - x_B; y_J - y_B) \\ (\frac{1}{2} - 1; 1 - 0) \\ (-\frac{1}{2}; 1)$$

$$\text{Soit } M(x; y) \in (BJ) : \vec{BM} (x - 1; y)$$

$\vec{BJ}$ et $\vec{BM}$ sont colinéaires car B, J et M sont alignés.

$$\text{d'où: } -\frac{1}{2}y - 1x(x-1) = 0 \quad (\text{car } x_{\vec{BJ}} \times y_{\vec{BM}} - y_{\vec{BJ}} \times x_{\vec{BM}} = 0)$$

(0,5)

$$\Leftrightarrow \underline{-x - \frac{1}{2}y + 1 = 0 \quad (\text{Equation cartésienne de } (BJ))}$$

$$b) \vec{ID} (x_D - x_I; y_D - y_I) \quad \left. \begin{matrix} (0 - \frac{1}{2}; 1 - 0) \\ (-\frac{1}{2}; 1) \end{matrix} \right\} \text{ or, } \vec{BJ} (-\frac{1}{2}; 1)$$

(0,5)

$$\text{On a } \vec{ID} = \vec{BJ}$$

$$\text{Donc } \underline{(ID) \parallel (BJ)}$$

$$4) \vec{AC} (x_C - x_A; y_C - y_A)$$

(7)

$$(1-0; 1-0)$$

$$(1; 1)$$

$$\text{Soit } M(x, y) \in (AC)$$

$$\vec{AM}(x_M - x_A; y_M - y_A)$$

$$\rightarrow \left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right)$$

$$\vec{AM} \text{ et } \vec{AC} \text{ sont colinéaires } \Leftrightarrow \underline{x - y = 0 \text{ (Equation cartésienne de } (AC))}$$

$$5) a) \vec{B} \vec{J} \left(-\frac{1}{2}; 1 \right) \quad \vec{AC} (1; 1)$$

$\vec{B} \vec{J}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires

d'où les droites $(B \vec{J})$ et (AC) sont sécantes.

Soit $F(x, y)$ leur point d'intersection

(x, y) solution du système suivant:

$$\begin{cases} -x - \frac{1}{2}y + 1 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 1 \\ y = x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{2}x = 1 \\ y = x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}x = 1 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Donc les coordonnées de F sont $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3} \right)$

Exercice (5)

$$\begin{pmatrix} 3,5 \\ 3,5 \end{pmatrix}$$

$$a_0 = 800$$

$$b_0 = 1400$$

1) a) Le volume d'eau est constant et vaut 2200 m^3

N'ai $a_n + b_n = 2200$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. ^{Après} Les données de l'énoncé ~~donnent~~:

$$a_{n+1} = 0,9a_n + 0,15b_n$$

Or, $a_n + b_n = 2200 \Leftrightarrow b_n = 2200 - a_n$

N'ai $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,15 \times (2200 - a_n)$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 0,9a_n - 0,15a_n + 0,15 \times 2200 \\ \Rightarrow a_{n+1} &= 0,75a_n + 330, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \\ &= \frac{3}{4} a_n + 330, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

0,75

2) Tant que ($a < 1100$) Faire
a prend la valeur $\frac{3}{4} a + 330$
n prend la valeur $n+1$

Fait Tant que

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_n - 1320$

$$\begin{aligned} a) u_{n+1} &= a_{n+1} - 1320 \\ &= \frac{3}{4} a_n + 330 - 1320 \\ &= \frac{3}{4} a_n - 990 \\ &= \frac{3}{4} \left(a_n - \frac{990}{\frac{3}{4}} \right) = \frac{3}{4} (a_n - 1320) \\ &= \frac{3}{4} u_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

0,75

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme $u_0 = a_0 - 1320 = 800 - 1320 = -520$

b) Comme (u_n) est géométrique:

0,5

$$\begin{aligned} u_n &= u_0 \times q^n \\ &= -520 \times \left(\frac{3}{4} \right)^n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

c) or, $u_n = a_n - 1320 \Leftrightarrow a_n = u_n + 1320$

0,5

$$\text{Donc: } a_n = -520 \times \left(\frac{3}{4} \right)^n + 1320, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

BONUS

+1

4). On détermine l'expression de b_n en fonction de n .
- On cherche une éventuelle valeur de n telle que $a_n = b_n$.