

1ère SS

Corrigé du DS
Dérivation et applications

(Faut le
03/03/17)

Exercice (1): ~~5~~
 $f(x) = \frac{3x+1}{2x-5}$

1) f est un quotient, elle est donc dérivable partout où elle est définie.

(1) Or, f est définie sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{5}{2}\right\}$

Donc f est dérivable sur tout intervalle ouvert inclus dans $\mathbb{R} - \left\{\frac{5}{2}\right\}$

2) Soit $h \neq 0$, $h \neq \frac{3}{2}$
 $f(1+h) = \frac{3(1+h)+1}{2(1+h)-5} = \frac{4+3h}{-3+2h}$

Alors $\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\frac{3h+4}{2h-3} - \frac{4}{-3}}{h}$

(2) $= \frac{\frac{3(3h+4) + 4(2h-3)}{3(2h-3)}}{h} = \frac{\frac{17h}{3(2h-3)}}{h}$

$= \frac{17}{3(2h-3)} = \tau(h)$

$\tau(h)$ a une limite finie quand $h \rightarrow 0$

Donc f est bien dérivable en 1

et $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{17}{3(2h-3)} = \boxed{-\frac{17}{9}}$

3) $(T_1): y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$= -\frac{17}{9}(x-1) + \left(-\frac{4}{3}\right)$

$= -\frac{17}{9}x + \frac{17}{9} - \frac{12}{9}$

donc: $(T_1): y = -\frac{17}{9}x + \frac{5}{9}$

Exercice (2): 4

$$g(x) = \frac{7}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 10x + 1$$

1) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme

$$g'(x) = \frac{7}{3} \times 3x^2 + \frac{3}{2} \times 2x - 10$$

(1)

$$g'(x) = 7x^2 + 3x - 10$$

2) Étude du signe de g' :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 7 \times (-10) = 9 + 280 = 289 > 0$$

Donc le trinôme admet deux racines distinctes.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + 17}{14} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - 17}{14} = \frac{-20}{14} = -\frac{10}{7}$$

(3)

Le trinôme est du signe de a à l'extérieur de ses racines.

Or, $a = 7 > 0$

Sur $[-3; 5]$: $g'(x)$ est positive sur $[-3; -\frac{10}{7}] \cup [1; 5]$

$g'(x)$ est négative sur $[-\frac{10}{7}; 1]$.

Donc le tableau de variation de g sur $[-3; 5]$:

x	-3	$-\frac{10}{7}$	1	5
Signe de g'		+	-	+
Variation de g	$-\frac{31}{2}$	$\frac{1694}{147}$	$-\frac{31}{6}$	$\frac{1684}{6}$

$$\begin{aligned} g(-3) &= -\frac{31}{2} \\ g(-\frac{10}{7}) &= \frac{1694}{147} \\ g(1) &= -\frac{31}{6} \\ g(5) &= \frac{1684}{6} \end{aligned}$$

Exercice 3

16

3

① $f(x) = 2\sqrt{x} + 1$, f est dérivable sur $]0; +\infty[$

et $f'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow$ Réponse [D]

② $g(x) = (5x+2)^2$, g est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$g(x) = 25x^2 + 2 \times 5x \times 2 + 2^2$$

$$= 25x^2 + 20x + 4$$

d'où $g'(x) = 25 \times 2x + 20$

$$= 50x + 20$$

$g'(x) = 10(5x+2) \rightarrow$ Réponse [A]

③ $h(x) = \frac{3x^2}{2x+1}$, h est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$

et on pose $u(x) = 3x^2$ $v(x) = 2x+1$

$$u'(x) = 3 \times 2x = 6x$$

$$v'(x) = 2$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

d'où $h'(x) = \frac{6x(2x+1) - 3x^2 \times 2}{(2x+1)^2}$

$$= \frac{12x^2 + 6x - 6x^2}{(2x+1)^2}$$

$$h'(x) = \frac{6x^2 + 6x}{(2x+1)^2} = \frac{6x(x+1)}{(2x+1)^2}$$

Réponse [C]

④ $i(x) = \frac{-4}{x}$, i est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

$$= -4 \times \frac{1}{x} \quad \text{d'où } i'(x) = -4 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{4}{x^2}$$

(T-2) : $y = i'(-2)(x+2) + i(-2) = \frac{4}{(-2)^2}(x+2) + 2$

Donc (1-2) : $y = x + 2 + 2 = x + 4 \rightarrow$ Réponse [A]

5) $j(x) = \frac{3x}{1+x^2}$, j est dérivable sur $\mathbb{R}$

Si on pose $u(x) = 3x$
 $u'(x) = 3$

$v(x) = 1+x^2$
 $v'(x) = 2x$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Donc $j'(x) = \frac{3(1+x^2) - 3x \times 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{3+3x^2-6x^2}{(1+x^2)^2}$
 $= \frac{-3x^2+3}{(1+x^2)^2}$

$\left(\begin{aligned} j'(x) = 0 &\Leftrightarrow -3x^2 + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x^2 = 3 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } -1 \end{aligned} \right)$

$(1+x^2)^2 > 0$, pour $x \in \mathbb{R}$

$-3x^2 + 3 \geq 0 \Leftrightarrow 3x^2 \leq 3$

$\Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-1; 1]$

Donc le tableau de variations de j :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
signe de j'	$-$	ϕ	$+$	ϕ	$-$
Variations de j					

$j(-1) = \frac{-3}{1+1} = -\frac{3}{2} = -1,5$

$j(1) = \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2} = 1,5$

En $x = 1$, j' s'annule et change de signe

Donc j admet un extremum local en 1.

Il s'agit d'un maximum et il vaut 1,5

$\rightarrow$ Réponse [B]

Exercice (4): 6

$$f(x) = -\frac{2}{9}x^2 + 8$$

(5)

1) B point d'intersection de la parabole (P) avec l'axe des abscisses.

$$-\frac{2}{9}x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{9}x^2 = -8$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{9}x^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{9 \times 8}{2} = 36$$

(1)

$$\Leftrightarrow x = 6 \text{ ou } -6$$

Or, $x_B < 0$

Donc B a pour coordonnées $(-6; 0)$

2) $S(x) = \text{Aire}(MBC)$

Or, $\text{Aire}(MBC) = \frac{MC \times BC}{2} = \frac{y \times (x+6)}{2}$

$$= \frac{\left(-\frac{2}{9}x^2 + 8\right)(x+6)}{2}$$

(2)

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{2}{9}x^3 - \frac{12}{9}x^2 + 8x + 48 \right]$$

Donc $S(x) = -\frac{1}{9}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 4x + 24$

3) S est une fonction polynôme - elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$

$$S'(x) = -\frac{1}{9} \times 3x^2 - \frac{2}{3} \times 2x + 4$$

$$= -\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 4$$

Étude du signe de S' :

$$\Delta = b^2 - 4ac = \frac{16}{9} + \frac{16}{3} = \frac{64}{9} > 0 \text{ d'où le trinôme admet 2 racines distinctes.}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{4}{3} + \frac{8}{3}}{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{-\frac{2}{3}} = 4 \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -6$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{4}{3} - \frac{8}{3}}{-\frac{2}{3}} = \frac{-\frac{4}{3}}{-\frac{2}{3}} = 2$$

(2)

Le trinôme est du signe de a à l'extérieur de ses racines.
 Or, $a = -\frac{1}{3} < 0$

D'où le tableau de variations de S .

x	$-\infty$	-6	2	$+\infty$
Signe de S'	$-$	0	$+$	$-$
Variations de S				

$$S(-6) = -\frac{1}{9}(-6)^3 - \frac{2}{3}(-6)^2 + 4 \times (-6) + 24$$

$$S(2) = -\frac{1}{9}2^3 - \frac{2}{3} \times 2^2 + 4 \times 2 + 24$$

$$= \frac{256}{9} \approx 28,4$$

4) En $x=2$, S' s'annule et change de signe.

Donc S admet 1 extrémum local en $x=2$

D'après les variations de S , cet extrémum est un maximum.

Donc l'aire de MB (est la plus grande possible quand $x=2$)

①

D'où les coordonnées de M .

$$\left(2; -\frac{2}{9} \times 2^2 + 8\right)$$

$$\left(2; -\frac{8}{9} + \frac{72}{9}\right)$$

Par conséquent, M a pour coordonnées $\left(2; \frac{64}{9}\right)$