CORRIGÉ Fait le

Première 5S	**Devoir de mathématiques :** *Vecteurs colinéaires/Repères*	Vendredi 06 janvier 2017

- Durée : 45 min
- Calculatrice autorisée

Observations :

NOTE :

Exercice 1 : /3

Soient $\vec{u}$ (2a + 3 ; - 1) et $\vec{v}$ (4 ; 4a – 1) , deux vecteurs du plan avec a, un paramètre réel

Calculer, en justifiant, les valeurs exactes possibles pour a afin que ces deux vecteurs soient colinéaires.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow x_{\vec{u}} \times y_{\vec{v}} = y_{\vec{u}} \times x_{\vec{v}}$

$\Leftrightarrow (2a+3)\times(4a-1) = -1\times 4$

$\Leftrightarrow 8a^2+10a-3+4=0$

$\Leftrightarrow 8a^2+10a+1=0$

$\Delta = b^2-4a'c = 10^2-4\times 8\times 1 = 100-32 = 68 > 0$

Il y a donc 2 valeurs possibles : $a_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10+\sqrt{68}}{16} = \frac{-10+2\sqrt{17}}{16} = \boxed{\frac{-5+\sqrt{17}}{8}}$

$a_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \boxed{\frac{-5-\sqrt{17}}{8}}$

Exercice 2 : /3

Soient E(-3 ;-1), F(5 ;2) et G(-1 ;1), trois points dans un même repère du plan.

On considère la droite (d) d'équation réduite y = 3

Calculer les coordonnées du point M tel que M∈(d) et (EF) // (GM)

Comme $M \in (d)$, $y_M = 3$ $\quad M(x_M ; 3)$

$\vec{EF}(x_F - x_E ; y_F - y_E)$ $\quad \vec{GM}(x_M+1 ; 2)$

$(8 ; 3)$

$(EF)//(GM) \Leftrightarrow \vec{EF}$ et $\vec{GM}$ colinéaires

$\Leftrightarrow x_{\vec{EF}} \times y_{\vec{GM}} = y_{\vec{EF}} \times x_{\vec{GM}}$

$\Leftrightarrow 16 = 3(x_M+1)$

$\Leftrightarrow \frac{16}{3} = x_M + 1$

$\Leftrightarrow \frac{16}{3} - \frac{3}{3} = x_M = \frac{13}{3}$

Donc : M a pour coordonnées $\left(\frac{13}{3} ; 3\right)$

Exercice 3 : 4

Soient les points A(-1 ;3) , B(8 ;7) et C(11 ;1)

1) Calculer les coordonnées du point D tel que : $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$x_D - x_A = \frac{3}{2}(x_B - x_A) + x_C - x_A \iff x_D = \frac{3}{2}(8+1) + 11 + \cancel{1} - \cancel{1} = \frac{27}{2} + \frac{22}{2} = \frac{49}{2}$

1,5 $\boxed{D\left(\frac{49}{2} ; 7\right)}$

$y_D - y_A = \frac{3}{2}(y_B - y_A) + y_C - y_A \iff y_D = \frac{3}{2}(7-3) + 1 - \cancel{3} + \cancel{3} = \frac{12}{2} + 1 = 6 + 1 = 7$

2) Calculer les coordonnées du point E tel que : $\overrightarrow{AE} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

$x_E - x_A = \frac{5}{2}(x_B - x_A) + \frac{1}{3}(x_C - x_B) \iff x_E = \frac{5}{2}(8+1) + \frac{1}{3}(11-8) - 1 = \frac{45}{2}$

1,5 $\boxed{E\left(\frac{45}{2} ; 11\right)}$

$y_E - y_A = \frac{5}{2}(y_B - y_A) + \frac{1}{3}(y_C - y_B) \iff y_E = \frac{5}{2}(7-3) + \frac{1}{3}(1-7) + 3 = 10 - 2 + 3 = 11$

3) Démontrer soigneusement que (BC) // (DE)

$\overrightarrow{BC}(11-8 ; 1-7)$ $\quad$ $\overrightarrow{DE}\left(\frac{45}{2} - \frac{49}{2} ; 11-7\right)$

$(3 ; -6)$ $\quad$ $(-2 ; 4)$

2 $x_{\overrightarrow{BC}} \times y_{\overrightarrow{DE}} = 3 \times 4 = 12$

$y_{\overrightarrow{BC}} \times x_{\overrightarrow{DE}} = -6 \times (-2) = 12$

d'où $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires

Donc (BC)//(DE)

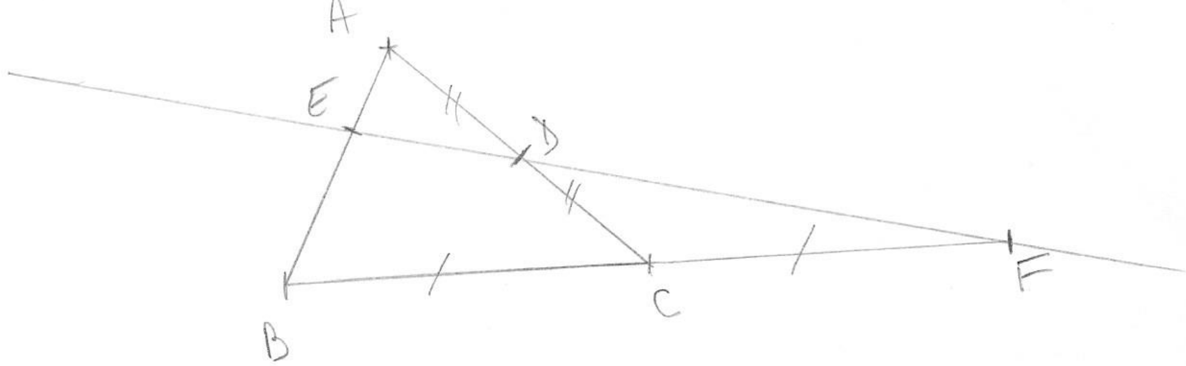
Exercice 4 : 10 7

On considère un triangle ABC , puis les trois points D, E et F définis par les relations $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BF} = 2\,\overrightarrow{BC}$

1) Faire une figure

2



On souhaite démontrer l'alignement des points D, E et F de deux manières différentes.

2) a) Pourquoi (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$) est-il un repère du plan ? Justifier

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non-colinéaires, de même origine A

1 Donc : (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$) est un repère du plan.

b) Déterminer les coordonnées des points D, E et F dans ce repère

$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = 0\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, d'où D a pour coordonnées $(0 ; \frac{1}{2})$

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AC}$, d'où E a pour coordonnées $(\frac{1}{3} ; 0)$

2 $\quad$ =0,5+0,5+1

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$ (relation de Chasles) $= \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ d'où : $F(-1 ; 2)$

c) En déduire que les points D, E et F sont alignés

On a $\overrightarrow{DE}(x_E - x_D ; y_E - y_D)$ $\quad \overrightarrow{DF}(x_F - x_D ; y_F - y_D)$

$\quad (\frac{1}{3} ; -\frac{1}{2}) \qquad (-1 ; 2 - \frac{1}{2})$

$\qquad (-1 ; \frac{3}{2})$

2

$-3\overrightarrow{DE}\ (-1 ; \frac{3}{2}) = \overrightarrow{DF}$, d'où $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ colinéaires avec un point en commun } Donc : $\boxed{\text{D, E et F sont alignés}}$

3) a) Exprimer $\overrightarrow{DE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}$ (relation de Chasles)

1 $\quad = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \underline{\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$

b) Exprimer $\overrightarrow{DF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$ (relation de Chasles)

$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$

1,5 $\quad = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AC}$ (relation de Chasles)

$= -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AC}$

$= \underline{-\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}}$

BONUS

c) En déduire que les points D, E et F sont alignés

$-3\overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DF}$

D'où les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires avec un point en commun.

1,5 $\quad$ Donc $\underline{\text{D, E et F sont alignés}}$