

(Fait le 08/12/2016)

Exercice (A):

$$1) f(x) = -x^2 + 2x + 3 \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases}$$

$a < 0$, d'où la parabole représentant f est orientée vers le bas

$$f(-1) = -(-1)^2 + 2 \times (-1) + 3$$

$$= -1 - 2 + 3 = 0 \quad \text{d'où la parabole cherche}$$

passer par le point de coordonnées $(-1; 0)$.

Donc C_3 représente f (Réponse (C)).

$$2) g(x) = 3x^2 + 5x + 6$$

Pour trouver les éventuels antécédents de 8 par g , on doit résoudre:

$$g(x) = 8 \Leftrightarrow 3x^2 + 5x + 6 = 8$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 5x - 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 3 \times (-2)$$

$$= 25 + 24 = 49 > 0$$

N'ait l'équation admet deux solutions distinctes.

Donc: 8 a deux antécédents par g . (Réponse (a)).

$$3) |\sqrt{3}+1| + \sqrt{3} + |\sqrt{3}-2| = \sqrt{3}+1 + \sqrt{3} + (-\sqrt{3}+2)$$

(car $\sqrt{3}+1 > 0$ d'où $|\sqrt{3}+1| = \sqrt{3}+1$
et $\sqrt{3}-2 < 0$, d'où $|\sqrt{3}-2| = -\sqrt{3}+2$)

$$= 2\sqrt{3} - \sqrt{3} + 3$$

$$= \sqrt{3} + 3 \quad \text{(Réponse (c))}$$

$$4) \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n(n+1) \end{cases}$$

$$u_1 = u_0 + 0 \times 1 = 1$$

$$u_2 = u_1 + 1 \times 2 = 1 + 2 = 3$$

$$u_3 = u_2 + 2 \times 3 = 3 + 6 = 9$$

Réponse (b)

$$5) S = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 2187.$$

(2)

On, $3^8 = 2187$ Puissance

Donc S : somme des termes d'une suite géométrique de raison 3 et de 1^{er} terme $3^0 = 1$

On a alors $S = \frac{1 - 3^{8+1}}{1 - 3} = \frac{1 - 3^9}{-2}$

$= \frac{3^9 - 1}{2}$ (Réponse (b))

6) $\sqrt{x+4} = x+2$ (E)

Equation définie sc: $x+4 \geq 0$ et $x+2 \geq 0$

$\Leftrightarrow x \geq -4$ et $x \geq -2$

L'équation est donc définie sur $[-2; +\infty[$

(E): $x+4 = (x+2)^2$

$\Leftrightarrow x+4 = x^2 + 4x + 4$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x = 0$

$\Leftrightarrow x(x+3) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$

or, $x = -3 \notin [-2; +\infty[$ et $0 \in [-2; +\infty[$

Donc: (E) n'admet qu'une seule solution

(Réponse (a))

Exercice (2):

1) q_n : quantité de déchets à l'année $2016 + n$

q_{n+1} : quantité de déchets à l'année $2016 + n + 1$ (l'année qui suit).

Comme 20% se dégradent d'une année à l'autre, on en garde donc 80%.
D'autre part, tous les ans, 160 kg s'ajoutent

Donc $q_{n+1} = 0,8 \times q_n + 160$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

2) Voir cahier en annexe.

3) Conjectures:
- il semblerait que la suite (q_n) soit croissante.
- Plus n augmente, plus u_n semble s'approcher de 800.

4) $x_n = q_n - 800$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

a)

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= q_{n+1} - 800 = 0,8q_n + 160 - 800 \\&= 0,8q_n - 640 \\&= 0,8\left(q_n - \frac{640}{0,8}\right) \\&= 0,8(q_n - 800) \\&= 0,8x_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Donc (x_n) est géométrique, de raison 0,8 et de 1^{er} terme:

$$\begin{aligned}\underline{x_0} &= q_0 - 800 = 0 - 800 \\&= \underline{-800}\end{aligned}$$

b) Comme (x_n) est géométrique,

$$\underline{x_n = x_0 \times 0,8^n = -800 \times 0,8^n}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

c) $x_n = q_n - 800 \Leftrightarrow \underline{q_n = x_n + 800}$

$$= -800 \times 0,8^n + 800 = \underline{800(1 - 0,8^n)}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

d)

$$\begin{aligned}q_{n+1} - q_n &= 800 \times (1 - 0,8^{n+1}) - 800 \times (1 - 0,8^n) \\&= 800 \times (-0,8^{n+1}) + 800 \times 0,8^n \\&= 800 \times 0,8^n (-0,8 + 1) \\&= 800 \times 0,8^n \times 0,2 = 160 \times 0,8^n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Or, $0,8^n > 0$ et $160 > 0$
d'où $160 \times 0,8^n > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

c'est-à-dire $q_{n+1} > q_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Achevons dit: (q) est strictement croissante (prouve la 1^{ère} conjecture).

Remarque: Pour démontrer la 2^{ème} conjecture.

$q_n = 800 \times (1 - 0,8^n)$ et $0 < 0,8 < 1$ (4)
 alors $0,8^n$ s'approche de 0
 quand n est suffisamment grand.
 d'où q_n s'approche de $800 \times 1 = 800$, plus n devient grand.
 (Ce qui prouve bien la 2^{ème} conjecture).

5) A l'aide de calculatrice, on retrouve bien que plus n augmente, plus q_n s'approche de 800.

La quantité de déchets se stabilise sur une valeur élevée (par rapport à la quantité initialement présente) et ne cesse d'augmenter tous les ans.
 Bob a toujours raison de se mettre au vert.

Exercice (3):

1) Compte-tenu de l'énoncé, $AM \in [0; 2]$
 car $AD = 2$

d'où $x \in [0; 2]$

2) $f(x) = MI^2 + MC^2$

Dans le triangle AMI , rectangle en A , on utilise le théorème de Pythagore:

$$MI^2 = AI^2 + AM^2 \Leftrightarrow MI^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + x^2 = \frac{1}{4} + x^2$$

On raisonne de même dans le triangle MDC , rectangle en D :

$$\begin{aligned}
 MC^2 &= MD^2 + DC^2 \\
 &= (2-x)^2 + 1^2 \\
 &= 4 - 4x + x^2 + 1
 \end{aligned}$$

d'où $f(x) = \frac{1}{4} + x^2 + 5 - 4x + x^2 = 2x^2 - 4x + \frac{21}{4}$

3) a) Dans le triangle IBC , rectangle en B , on applique le théorème de Pythagore:

$$\begin{aligned}
 IC^2 &= IB^2 + BC^2 \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2^2 = \frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4}
 \end{aligned}$$

(5)

$$b) \text{ IMC rectangle en M } \Leftrightarrow IC^2 = MI^2 + MC^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{17}{4} = MI^2 + MC^2$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{17}{4}$$

c) Il faut résoudre l'équation:

$$2x^2 - 4x + \frac{21}{4} = \frac{17}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x + \frac{21}{4} - \frac{17}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 1$$

$$= 16 - 8 = 8 > 0$$

2^e équation admet 2 solutions distinctes:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + \sqrt{8}}{4} = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{4} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \approx 1,71$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - \sqrt{8}}{4} = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{4} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \approx 0,29$$

Le triangle IMC sera donc rectangle en M quand $AM = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$
ou $AM = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$

Exercice (4): $f(x) = 5x^2 + 9x - 2$

$$1) \Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 9^2 - 4 \times 5 \times (-2)$$

$$= 81 + 40 = 121 > 0 \text{ d'où le trinôme admet 2 racines distinctes}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 + 11}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 - 11}{10}$$

$$= \frac{-20}{10} = -2$$

Le trinôme est du signe de a à l'extérieur de ses racines.

$$\text{Or, } a = 5 > 0$$

$$\text{d'où } f(x) \geq 0 \text{ pour } x \in]-\infty; -2] \cup [\frac{1}{5}; +\infty[$$

$$f(x) < 0 \text{ pour } x \in]-2; \frac{1}{5}[$$

Il y a le tableau de signes de f :

(6)

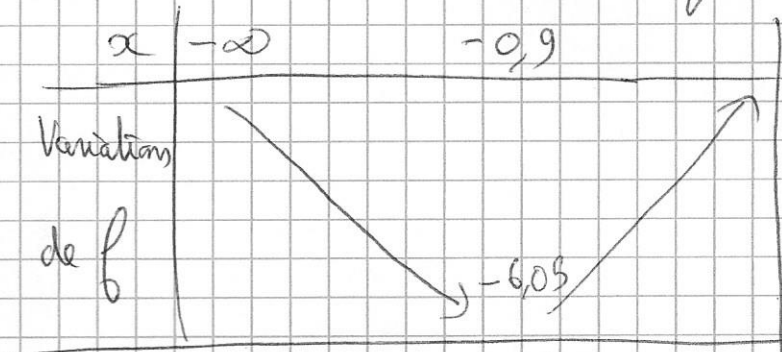
x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{5}$	$+\infty$	
Signe de $f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

2) $a = 5 > 0$ d'où f est d'abord décroissante, puis croissante

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-9}{2 \times 5} = \frac{-9}{10} = -0,9$$

$$\beta = f(x) = f(-0,9) = 5 \times (-0,9)^2 + 9 \times (-0,9) - 2 = -6,05 = -\frac{121}{20}$$

D'où le tableau de variation de f :



3) a) $g(x) = \sqrt{5x^2 + 9x - 2}$

g est définie si et seulement si $5x^2 + 9x - 2 \geq 0$

Or, d'après la question 1), $5x^2 + 9x - 2 \geq 0$

$$\text{pour } x \in]-\infty; -2] \cup [\frac{1}{5}; +\infty[$$

Donc: $D_g =]-\infty; -2] \cup [\frac{1}{5}; +\infty[$

b) Sur $]-\infty; -2]$:

Soient $a, b \in]-\infty; -2]$, avec $a < b$.

$-2 < -0,9$ et sur $]-\infty; -0,9]$, f est strictement décroissante

d'où: $f(a) > f(b)$

d'où: $\sqrt{f(a)} > \sqrt{f(b)}$ car $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

(c'est-à-dire $g(a) > g(b)$).

Achevément dit: g est strictement décroissante sur $]-\infty; -2]$ (7)

On raisonne de même sur $[\frac{1}{5}; +\infty[$

g est strictement croissante sur $[\frac{1}{5}; +\infty[$

c) (d): $y = 3x$

On doit résoudre l'équation: $g(x) = 3x$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5x^2 + 9x - 2} = 3x$$

Cette équation est définie pour x tels que: $5x^2 + 9x - 2 \geq 0$

$$\text{et } 3x \geq 0$$

Donc: On ~~peut~~ résoudre cette équation sur $[\frac{1}{5}; +\infty[$.

$$\text{d'où: } 5x^2 + 9x - 2 = 9x^2$$

$$\Leftrightarrow -4x^2 + 9x - 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9^2 - 4 \times (-4) \times (-2) \\ = 81 - 32 = 49 > 0$$

L'équation admet 2 solutions distinctes.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 + 7}{-8} = \frac{-2}{-8} = \frac{1}{4} > \frac{1}{5}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 - 7}{-8} = \frac{-16}{-8} = 2$$

$$\text{Donc: } S = \left\{ \frac{1}{4}; 2 \right\}$$

~~Il y a~~ Il y a 2 points d'intersection entre $(\mathcal{C}_g)$ et (d)
et ces points ont pour abscisses respectives: $\frac{1}{4}$ et 2.