(1)

NOM :…………………………………………PRENOM :…………………………………………

CORRIGÉ Fait le

Première 5S	**Devoir de mathématiques :** *Second degré*	Vendredi 07 octobre 2016

- Calculatrices autorisées
- Durée : 1h30
- Répondre directement sur le sujet

Observations :

NOTE :

Exercice 1 : (4 pts)

Soit $m \in \mathbb{R}$, on considère la famille d'équations (E_m) : $(2m + 1)x^2 - (m + 3)x + 1 = 0$

1) A quelle condition sur m, (E_m) est-elle une équation du second degré ? Justifier .

(E_m) équation du second degré $\iff 2m+1 \neq 0$
$\iff m \neq -\frac{1}{2}$ (1)

2) On suppose que $m \neq -\frac{1}{2}$:

a) Résoudre l'inéquation $x^2 - 2x + 5 > 0$

$\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 5 \end{cases}$ calcul de $\Delta = b^2 - 4ac$
$= (-2)^2 - 4 \times 1 \times 5$
$= 4 - 20 = -16 < 0$

D'où le trinôme n'admet aucune racine réelle
Il est toujours du signe de a. Or, $a = 1 > 0$
D'où $x^2 - 2x + 5 > 0$, pour $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{S = \mathbb{R}}$ (1,5)

b) En déduire que pour tout $m \neq -\frac{1}{2}$, (E_m) admet toujours deux solutions distinctes

Soit $m \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$:

(E_m) admet 2 solutions distinctes $\iff \Delta > 0$
$\iff (m+3)^2 - 4(2m+1) > 0$
$\iff m^2 + 6m + 9 - 8m - 4 > 0$ (1,5)
$\iff m^2 - 2m + 5 > 0$

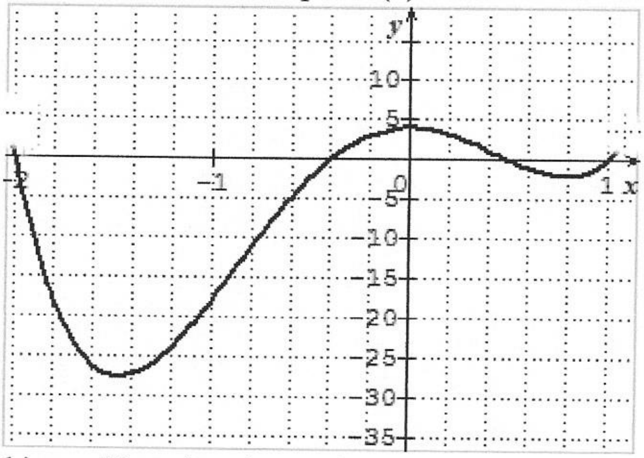
D'après 2)a) $m^2 - 2m + 5 > 0$, pour tout $m \in \mathbb{R}$ donc (E_m) admet toujours 2 solutions distinctes

NOM :……………………………………….PRENOM :…………………………………………

(2)

Exercice 2 : (6 pts)

On considère sur [-2 ;1], la fonction f définie par : $f(x) = 10x^4 + 9x^3 - 23x^2 + 4$



1) Par lecture graphique, déterminer le nombre d'antécédents de 0 par f et leurs valeurs approximatives Les antécédents de 0 par f sont les abscisses des points

(1) d'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses. 0 a 4 antécédents par f.

$\{-2 ; -0{,}4 ; 0{,}5 ; 1\}$

2) Montrer que $f(x) = (5x^2 - 3x - 2)(2x^2 + 3x - 2)$

(1) $(5x^2-3x-2)(2x^2+3x-2) = 10x^4+15x^3-10x^2-6x^3-9x^2+\cancel{6x}-4x^2-\cancel{6x}+4$

$= 10x^4+9x^3-23x^2+4 = f(x)$

Donc $f(x) = (5x^2-3x-2)(2x^2+3x-2)$

3) En déduire le calcul des antécédents de 0 par f.

x antécédent de 0 par $f \iff f(x) = 0 \iff (5x^2-3x-2)(2x^2+3x-2) = 0$

(2) $\iff 5x^2-3x-2 = 0$ ou $2x^2+3x-2 = 0$

ⓐ $5x^2-3x-2=0$ $\begin{cases} a=5 \\ b=-3 \\ c=-2 \end{cases}$

$\Delta = b^2-4ac = (-3)^2-4\times5\times(-2)$
$= 9+40 = 49 > 0$

D'où l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3+7}{10} = 1$

$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3-7}{10} = -\dfrac{2}{5}$

ⓑ $2x^2+3x-2=0$ $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \\ c=-2 \end{cases}$

$\Delta = b^2-4ac$
$= 3^2-4\times2\times(-2)$
$= 9+16 = 25 > 0$

D'où l'équation admet 2 solutions réelles distinctes

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3+5}{4} = \dfrac{1}{2}$

$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3-5}{4} = -2$

Comparer avec la question 1) Par conséquent : Les antécédents de 0 par f sont :

$1 ; -\frac{2}{5} ; \frac{1}{2} ; -2$
($-\frac{2}{5}$ " $-0{,}4$)

On retrouve bien les valeurs déterminées par lecture graphique dans la question 1)

4) Etude du signe de f sur [-2 ;1]

- Étude du signe de $5x^2-3x-2$:
ce trinôme a deux racines distinctes : 1 et $-\frac{2}{5}$
Il est du signe de a à l'extérieur de ses racines
or $a = 5 > 0$
D'où $5x^2-3x-2 \geq 0$ pour $x \in]-\infty ; -\frac{2}{5}] \cup [1 ; +\infty[$
- Étude du signe de $2x^2+3x-2$: on raisonne de même. D'où $2x^2+3x-2 \geq 0$ pour $x \in]-\infty ; -2] \cup [\frac{1}{2} ; +\infty[$
D'où le tableau de signes :

x	-2		$-0{,}4$		$0{,}5$		1
signe de $5x^2-3x-2$		+	0	−		−	0
signe de $2x^2+3x-2$	0	−		−	0	+	
signe de $f(x)$	0	−	0	+	0	−	0

(2)

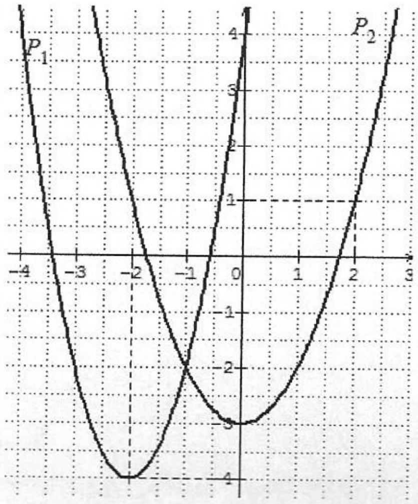
$f(x) \leq 0$ pour $x \in [-2 ; -0{,}4] \cup [0{,}5 ; 1]$
$f(x) > 0$ pour $x \in]-0{,}4 ; 0{,}5[$

NOM :……………………………………….PRENOM :…………………………………………

(3)

Exercice 3 : (4 pts)

Sur IR, on définit deux fonctions f et g par : $f(x) = 2x^2 + 8x + 4$ et $g(x) = x^2 - 3$



1) Attribuer à chaque fonction sa courbe en justifiant :

(1)

On a $f(0) = 2\times 0^2 + 8\times 0 + 4 = 4$ d'où la parabole représentant f passe par le point de coordonnées (0 ; 4) – Donc (P_1) représente f

Et donc, (P_2) représente g

2) Calculer les coordonnées des points d'intersection de ces deux paraboles :

(1,5)

Il faut résoudre $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x^2+8x+4 = x^2-3 \Leftrightarrow x^2+8x+7=0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 4\times1\times\cancel{7} = 36 > 0$ d'où l'équation admet deux solutions distinctes

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8+6}{2} = -1$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8-6}{2} = -7$ – D'où les points de coordonnées $(-1 ; (-1)^2-3) = (-1 ; -2)$ et $(-7 ; (-7)^2-3)$

$(-7 ; 46)$ sont les deux points d'intersection de (P_1) et (P_2)

3) Quel est l'ensemble des nombres x tels pour lesquels (P_1) est située en dessous de (P_2) ?

(1,5)

On doit alors résoudre l'inéquation $f(x) \leq g(x)$

$\Leftrightarrow 2x^2+8x+4 \leq x^2-3$

$\Leftrightarrow x^2+8x+7 \leq 0$

D'après 2), le trinôme a 2 racines distinctes :

$x_1 = -1$ et $x_2 = -7$

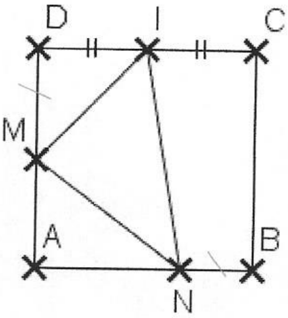
Il est du signe de a à l'extérieur de ses racines

Or, $a = 1 > 0$

D'où $x^2+8x+7 \leq 0$, pour $x \in [-7 ; -1]$

Donc P_1 est située en-dessous de P_2 sur $[-7 ; -1]$

Exercice 4 : (6 pts)



6

NOM :…………………………………………PRENOM :…………………………………………

ABCD est un carré de côté 10 cm. I est le milieu de [DC]. M∈[AD] et N∈[AB]

Avec AM = BN = x

1

1) Exprimer l'aire du triangle DIM en fonction de x DIM triangle rectangle en D.

$$\text{Aire}(DIM) = \frac{DM \times DI}{2} = \frac{(10-x)\times 5}{2} = 25 - \frac{5}{2}x$$

2) Exprimer l'aire du triangle AMN en fonction de x

1

AMN triangle rectangle en A :

$$\text{Aire}(AMN) = \frac{AM \times AN}{2} = \frac{x \times (10-x)}{2} = 5x - \frac{1}{2}x^2$$

3) Montrer que l'aire du trapèze ICBN est donnée par : 5(x + 5)

$$\text{Aire (Trapèze)} = \frac{\text{Petite Base + Grande Base}}{2} \times \text{hauteur} = \frac{(BN+IC)\times BC}{2}$$

1

$$= \frac{(x+5)\times 10}{2} = 5(x+5)$$

4) En déduire l'aire du triangle IMN en fonction de x sous la forme $ax^2 + bx + c$

$$\text{Aire}(IMN) = \text{Aire (carré } ABCD) - (\text{Aire}(DIM) + \text{Aire}(AMN) + \text{Aire}(ICBN))$$

$$= 10^2 - \left(25 - \frac{5}{2}x + 5x - \frac{1}{2}x^2 + 5(x+5)\right)$$

1,5

$$= 100 - \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{15}{2}x + 50\right)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{15}{2}x + 50 \qquad \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{15}{2} \\ c = 50 \end{cases}$$

5) Où placer le point M sur [AD] pour que l'aire du triangle IMN soit minimale ? Justifier.

Aire(IMN) minimale ⟺ $\frac{1}{2}x^2 - \frac{15}{2}x + 50$ minimale. ($a = \frac{1}{2} > 0$, d'où le trinôme admet un minimum absolu sur $\mathbb{R}$ (en particulier sur $[0;10]$) en β)

Calculons α :

1,5

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{\frac{15}{2}}{2\times\frac{1}{2}} = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ cm}$$ (abscisse du sommet de la parabole représentant le trinôme).

Il suffit de placer M à 7,5 cm de A sur [AD] pour que l'aire de IMN soit minimale.

Exercice 5 : BONUS +2

On dispose de deux résistances électriques R_1 et R_2.

- Lorsqu'on les monte en série, la résistance équivalente est de 135 Ω
- Lorsqu'on les monte en parallèle, la résistance équivalente est de 30 Ω

Calculer R_1 et R_2

$R_1 + R_2 = 135$ (en série)

$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{30}$ (en parallèle).

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{30} \iff \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2} = \frac{1}{30} \iff \frac{135}{R_1 R_2} = \frac{1}{30}$$

$$\iff R_1 R_2 = 30 \times 135 = 4050$$

d'où le système :

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = 135 \\ R_1 R_2 = 4050 \end{cases}$$

On pose : $x^2 - Sx + P = 0$

$$x^2 - 135x + 4050 = 0$$

$\begin{cases} a = 1 \\ b = -135 \\ c = 4050 \end{cases}$ $\Delta = b^2 - 4ac = (135)^2 - 4\times 1 \times 4050 = 2025 > 0$

L'équation admet deux solutions distinctes

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{135+45}{2} = \frac{180}{2} = 90$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{135-45}{2} = \frac{90}{2} = 45$$

D'où $R_1 = 90\,\Omega$ $R_2 = 45\,\Omega$