

10/5

Corrigé de l'examen n°1

(Date 14/04/16)

(1)

Exercice (1):

1) (p_n) suite géométrique : $p_n = p_1 \times q^{n-1}$

Donc $p_n = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

2) (x_n) suite arithmétique : $S = x_0 + x_1 + \dots + x_{20}$
 $= \text{nombre de termes} \times \frac{1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme}}{2}$
 $= 21 \times \frac{x_0 + x_{20}}{2}$

$x_0 = -2$ et $x_{20} = x_0 + 20 \times r$
 $= -2 + 20 \times \frac{2}{5}$
 $= -2 + 8 = 6$

d'où :
 $S = 21 \times \frac{-2 + 6}{2}$
 $= 21 \times 2 = \boxed{42}$

3) f est un trinôme du second degré : $f(x) = ax^2 + bx + c$
 $= a(x - \alpha)^2 + \beta$ (Forme canonique)
avec $(\alpha; \beta)$ coordonnées du sommet de la parabole

représentant f - Ici, $\alpha = 2$ et $\beta = 3$

d'où $f(x) = a(x - 2)^2 + 3$

Or, par lecture graphique, $f(-1) = 0 \Leftrightarrow a(-1)^2 + 3 = 0$
 $\Leftrightarrow a = -3$

Donc : $f(x) = -3(x - 2)^2 + 3$ (Forme canonique de f)

4) $\sqrt{3x+10} = x+2$ 2 conditions à remplir : (a) $3x+10 \geq 0$, pour que $\sqrt{3x+10}$ soit défini

(b) $x+2 \geq 0$ (car $\sqrt{3x+10} \geq 0$)

$3x+10 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{10}{3}$ et $x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$

d'où finalement : l'ensemble de définition de cette équation est :

$[-2; +\infty[$

Soit $x \in [-2; +\infty[: 3x+10 = (x+2)^2 \Leftrightarrow 3x+10 = x^2 + 4x + 4$

$$(\Rightarrow) x^2 + x - 6 = 0$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 24 = 25 > 0$ d'où l'équation admet 2 solutions distinctes.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 5}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 5}{2} = -3$$

Or, $x \in [-2; +\infty[$ Donc : $S = \{2\}$

Exercice (2):

1) D'après les données de l'énoncé : $\mathcal{D} = [0; 3]$

$$\begin{aligned} 2) A(x) &= \text{Aire (rectangle ABCD)} - (\text{Aire (AMQ)} + \text{Aire (QDP)} + \text{Aire (PMN)} + \text{Aire (BMN)}) \\ &= 3 \times 5 - \left(\frac{x \times (5-x)}{2} + \frac{x \times (3-x)}{2} + \frac{x \times (5-x)}{2} + \frac{x \times (3-x)}{2} \right) \\ &= 15 - x(5-x) - x(3-x) \end{aligned}$$

Donc $A(x) = 2x^2 - 8x + 15$

$$\begin{aligned} 3) a) A(x) &= 9 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 15 = 9 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac = 64 - 4 \times 2 \times 6 \\ &= 64 - 48 = 16 > 0 \quad \text{d'où l'équation admet 2 solutions} \\ x_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 + 4}{4} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 - 4}{4} = 1 \end{aligned}$$

On peut placer M sat à 1 cm de A, soit à 3 cm de A (c'est-à-dire en B)

et alors $A(x) = 9 \text{ cm}^2$

$$b) A(x) \leq 9 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 6 \leq 0$$

D'après 3a), les racines de $2x^2 - 8x + 6$ sont 1 et 3

Le trinôme est du signe de a à l'extérieur de ses racines. Or, $a = 2 > 0$

Donc $2x^2 - 8x + 6 \leq 0$ pour $x \in [1; 3]$

Il suffit de placer M à plus de 1 cm de A.

4) $A(x) = 2x^2 - 8x + 15$ - Comme $a = 2 > 0$, d'où A est d'abord ③
 décroissante, puis croissante $\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{8}{4} = 2$

et $\beta = A(\alpha) = A(2) = 7$

D'où le tableau de variation de A sur $[0; 3]$:

x	0	2	3
Variations de A	15	7	9

5) D'après les variations de la question 4),
 Aire (maximale) = 15 cm^2
 Aire (minimale) = 7 cm^2

Exercice ③:

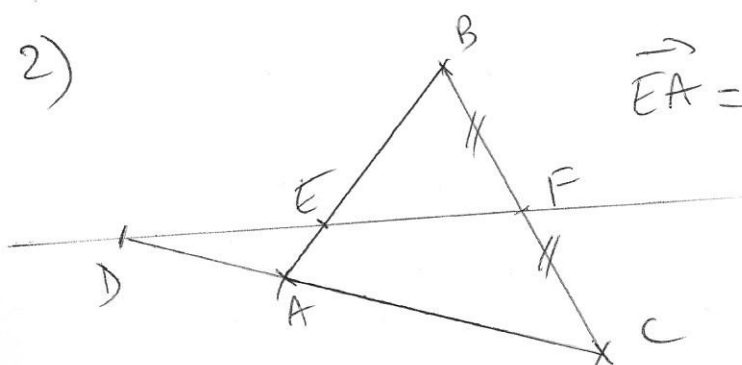
1) $\vec{EA} = \frac{1}{3} \vec{BE} = \frac{1}{3} \vec{BA} + \frac{1}{3} \vec{AE}$ (relation de Chasles)
 $= \frac{1}{3} \vec{BA} + \frac{1}{9} \vec{EB}$

$\vec{EA} = \frac{1}{3} \vec{BA} + \frac{1}{9} \vec{EA} + \frac{1}{9} \vec{AB}$

$\Rightarrow \vec{EA} - \frac{1}{9} \vec{EA} = \frac{1}{3} \vec{BA} - \frac{1}{9} \vec{BA}$
 $= \frac{2}{9} \vec{BA}$

$\Rightarrow \frac{8}{9} \vec{EA} = \frac{2}{9} \vec{BA} \Rightarrow \underline{\vec{EA} = \frac{2}{8} \vec{BA} = \frac{1}{4} \vec{BA}}$

2)



$\vec{EA} = \frac{1}{4} \vec{BA} \Rightarrow \vec{AE} = \frac{1}{4} \vec{AB}$

3) a) $\vec{EF} = \vec{EA} + \vec{AB} + \vec{BF}$ (relation de Chasles)

$= -\frac{1}{4} \vec{AB} + \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{BC}$ (car F milieu de $[BC]$)

$= \frac{3}{4} \vec{AB} + \frac{1}{2} (\vec{BA} + \vec{AC})$ (relation de Chasles)

$$\vec{EF} = \frac{3}{4} \vec{AB} - \frac{1}{2} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AC}$$

Donc $\vec{EF} = \frac{1}{4} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AC}$

$$\vec{DF} = \vec{DE} + \vec{EF} \text{ (relation de Chasles)}$$

$$= \vec{DA} + \vec{AE} + \frac{1}{4} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AC}$$

$$= \frac{1}{2} \vec{AC} + \frac{1}{4} \vec{AB} + \frac{1}{4} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AC}$$

$$\vec{DF} = \frac{1}{2} \vec{AB} + \vec{AC}$$

on a : $\frac{1}{2} \vec{DF} = \frac{1}{4} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AC}$
 $= \vec{EF}$

D'où les vecteurs $\vec{EF}$ et $\vec{DF}$ sont colinéaires avec un point commun

Donc : D, E et F sont alignés.

4) a) ABC étant non aplati, alors les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont non colinéaires
 D'autre part, ils ont la même origine A

Donc : $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$ est un repère du plan.

b) A(0;0) car c'est l'origine du repère

$$\vec{AB} = 1\vec{AB} + 0\vec{AC} \text{ d'où } \underline{B(1;0)} \quad \vec{AC} = 0\vec{AB} + 1\vec{AC} \text{ d'où } \underline{C(0;1)}$$

$$\vec{AD} = 0\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC} \text{ d'où } \underline{D(0; -\frac{1}{2})} \quad \vec{AE} = \frac{1}{4}\vec{AB} + 0\vec{AC} \text{ d'où } \underline{E(\frac{1}{4}; 0)}$$

$$\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{BF} \text{ (relation de Chasles)}$$

$$= \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{BA} + \frac{1}{2} \vec{AC} \text{ (relation de Chasles et Formule de } \{BC\})$$

$$= \frac{1}{2} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AC} \text{ d'où } \underline{F(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})}$$

c) $\vec{DE}(x_E - x_D; y_E - y_D)$
 $(\frac{1}{4}; \frac{1}{2})$

$\vec{DF}(x_F - x_D; y_F - y_D)$
 $(\frac{1}{2}; 1)$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{\vec{DE}} \times y_{\vec{DF}} = \frac{1}{4} \\ y_{\vec{DE}} \times x_{\vec{DF}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{array} \right.$$

Donc $\vec{DE}$ et $\vec{DF}$ sont colinéaires

avec un point commun

Donc D, E et F sont alignés.

Exercice (4).

1) a) Voir figure : ABCD est un trapèze.

6) Comme $\vec{CD} = 2\vec{AB}$

$$\begin{cases} x_D - x_C = 2(x_B - x_A) \\ y_D - y_C = 2(y_B - y_A) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D + 5 = 2 \times (2 + 2) \\ y_D = 2 \times (2 - 4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 8 - 5 = 3 \\ y_D = -4 \end{cases} \quad \text{Donc } \underline{D(3; -4)}$$

2)a) (d): $6x + y - 14 = 0$

$$6 \times 2 + 2 - 14 = 12 + 2 - 14 = 0 \quad \text{d'où } \underline{B(2; 2) \in (d)}$$

$$6 \times 3 - 4 - 14 = 18 - 4 - 14 = 0 \quad \text{d'où } \underline{D(3; -4) \in (d)}$$

b) Equation cartésienne de (AC):

Soit $M(x; y) \in (AC)$: alors $\vec{AC}$ et $\vec{AM}$ sont colinéaires

$$\vec{AC}(x_C - x_A; y_C - y_A) \quad \vec{AM}(x + 2; y - 4)$$

$$(-5 + 2; 0 - 4)$$

$$(-3; -4)$$

colinéarité de $\vec{AC}$ et $\vec{AM}$: $-3(y - 4) = -4(x + 2)$

$$\Leftrightarrow 4x - 3y + 20 = 0$$

D'où une équation cartésienne de (AC) est:

$$\underline{(AC): 4x - 3y + 20 = 0}$$

c) on a $\vec{AC}(-3; -4)$ et $\vec{BD}(x_D - x_B; y_D - y_B)$

$$(1; -6)$$

$$\begin{cases} x_{AC} \times y_{BD} = -3 \times (-6) = 18 \\ y_{AC} \times x_{BD} = -4 \times 1 = -4 \end{cases}$$

d'où $\vec{AC}$ et $\vec{BD}$ ne sont pas colinéaires

Donc $\underline{(AC) \text{ et } (BD) \text{ sont sécantes}}$

d) Soit $E(x; y)$ leur point d'intersection:

$$(x; y) \text{ solution de: } \begin{cases} 4x - 3y + 20 = 0 \\ 6x + y - 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3y = -20 \\ 6x + y = 14 \end{cases}$$

Par substitution:

$$\begin{cases} 2x - 3(-6x + 14) = -20 \\ y = -6x + 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 22x = -20 + 42 \\ y = -6x + 14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 22x = 22 \\ y = -6x + 14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 8 \end{cases}$$

Donc $E(1; 8)$

Exercice (5):

$$\begin{aligned} 1) \text{ En septembre 2015: } \frac{80}{100} \times 150 + 40 &= \frac{4}{5} \times 150 + 40 \\ &= 4 \times 30 + 40 \\ &= 160 \end{aligned}$$

En septembre 2015, il y aura 160 élèves inscrits au préscolaire

2) Chaque année 80% des élèves renouvelent leur inscription et 40 nouveaux s'inscrivent: $u_{n+1} = \frac{80}{100} \times u_n + 40 = 0,8u_n + 40$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

3) a)

Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Valeur de u	150	160	168	174,4	179,52	183,62	186,89	189,51	191,61	///
condition $u \leq 190$	Vraie	Vraie	Vraie	Vraie	Vraie	Vraie	Vraie	Vraie	Faux	///

b) En sortie, l'algorithme affichera 2022 (c'est-à-dire 2014 + 8 car $n = 8$)

4) $v_n = u_n - 200$

$$\begin{aligned} a) v_{n+1} &= u_{n+1} - 200 = 0,8u_n + 40 - 200 \\ &= 0,8u_n - 160 = 0,8(u_n - \frac{160}{0,8}) \\ &= 0,8(u_n - 200) = 0,8v_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,8 et de

(7)

$$1^{\text{er}} \text{ terme } v_0 = u_0 - 200 = 150 - 200 = \underline{-50}$$

b) Comme (v_n) est géométrique,

$$\underline{v_n = v_0 \times 0,8^n = -50 \times 0,8^n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$$

$$\text{Comme } v_n = u_n - 200$$

$$\Leftrightarrow \underline{u_n = v_n + 200 = 200 - 50 \times 0,8^n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$$

$$c) \text{ On a } u_7 \simeq 189,51 \text{ et } u_8 \simeq 191,61 > 190$$

Donc la directrice du périscolaire refusera des inscriptions
en 2022 ($= 2014 + 8$) faute de places.