

Exercice (1): (18)

1) Comme (u_n) est arithmétique:

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} u_{32} &= u_5 + (32-5) \times r \\ \Leftrightarrow -5 &= 12 + 27r \\ \Leftrightarrow -17 &= 27r \\ \Leftrightarrow -\frac{17}{27} &= r \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \text{Or a:} \\ u_{23} &= u_5 + (23-5) \times \left(-\frac{17}{27}\right) \\ &= 12 + 18 \times \left(-\frac{17}{27}\right) \\ &= 12 + \frac{8 \times 2 \times (-17)}{8 \times 3} \\ &= \frac{36}{3} - \frac{34}{3} = \boxed{\frac{2}{3}} \end{aligned}
 \end{aligned}$$

2) (v_n) suite arithmétique:

$$\begin{aligned}
 & v_n = v_0 + nr = -3 + 12n = 777 \\
 & \Leftrightarrow 12n = 780 \\
 & \Leftrightarrow n = \frac{780}{12} = \boxed{65}
 \end{aligned}$$

3) $w_5 + w_{10} + w_{15} = 9$

$$\text{Or, } w_5 = w_{10} - 5r \quad \text{et } w_{15} = w_{10} + 5r$$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc: } w_5 + w_{10} + w_{15} &= w_{10} - 5r + w_{10} + w_{10} + 5r \\
 &= 3w_{10} = 9 \\
 \Leftrightarrow w_{10} &= \frac{9}{3} = \underline{3}
 \end{aligned}$$

$$w_{25} = w_{10} + (25-10) \times r$$

$$\Leftrightarrow -3 = 3 + 15r$$

$$\Leftrightarrow -6 = 15r$$

$$\Leftrightarrow r = -\frac{6}{15} = -\frac{2 \times 3}{3 \times 5} = -\frac{2}{5}$$

$$\text{Donc } w_{32} = w_{25} + (32-25) \times \left(-\frac{2}{5}\right)$$

$$= -3 + 7 \times \left(-\frac{2}{5}\right)$$

$$= -\frac{15}{5} - \frac{14}{5}$$

$$= \boxed{-\frac{29}{5}}$$

(1,5)

4) (x_n) suite arithmétique de raison -5 , de 1^{er} terme $x_0 = 7$ (2)

a) $y_{m+1} = 5x_{m+1} - 6$ d'où $y_{m+1} - y_m = 5x_{m+1} - 6 - (5x_m - 6)$
 $= 5(x_{m+1} - x_m)$

Or, $x_{m+1} - x_m = -5$, pour tout $m \in \mathbb{N}$

① ^{+0,5} d'où: $y_{m+1} - y_m = 5 \times (-5) = -25$, pour tout $m \in \mathbb{N}$

Donc: (y_n) est arithmétique de raison -25 et de 1^{er} terme $y_0 = 5x_0 - 6$
 $= 5 \times 7 - 6$
 $= 29$

B) $z_{m+1} = \frac{1}{2} y_{m+1} - \frac{5}{2} x_{m+1}$

d'où $z_{m+1} - z_m = \frac{1}{2} y_{m+1} - \frac{5}{2} x_{m+1} - (\frac{1}{2} y_m - \frac{5}{2} x_m)$
 $= \frac{1}{2} (y_{m+1} - y_m) - \frac{5}{2} (x_{m+1} - x_m)$ (4,5)

Or, $y_{m+1} - y_m = -25$ (question a)) et $x_{m+1} - x_m = -5$

D'où: $z_{m+1} - z_m = \frac{1}{2} \times (-25) - \frac{5}{2} \times (-5)$
 $= -\frac{25}{2} + \frac{25}{2} = 0$, pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Donc (z_n) est constante

c) $S = x_0 + x_1 + \dots + x_{20}$ (x_n) : arithmétique de raison -5
 avec $x_0 = 7$.

alors: $S = \frac{21}{2} \times \frac{x_0 + x_{20}}{2} = \frac{21}{2} \times (7 + x_{20})$ (4,5)

Or, $x_{20} = x_0 + 20 \times (-5)$
 $= 7 - 100 = -93$

Donc $S = \frac{21}{2} [7 - 93] = \frac{21}{2} \times (-86) = 21 \times (-43)$
 $= -903$

Exercice (2): (7)

1) $u_n = 3 - \sqrt{2n+5}$

u_n est définie si et seulement si $2n+5 \geq 0$

① $\Rightarrow n \geq -\frac{5}{2}$ or $n \in \mathbb{N}$

Donc u_n est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(3)

$$2) \quad u_0 = 3 - \sqrt{2 \times 0 + 5} = \boxed{3 - \sqrt{5}} \quad u_1 = 3 - \sqrt{2 \times 1 + 5} = \boxed{3 - \sqrt{7}} \quad (0,25)$$

$$u_2 = 3 - \sqrt{2 \times 2 + 5} = 3 - \sqrt{9} = 3 - 3 = \boxed{0} \quad (0,25)$$

$$3) \text{ Soit } f(x) = 3 - \sqrt{2x+5}$$

a) Soient $a, b \in]0; +\infty[$, avec $a < b$.

$$0 < 2a+5 < 2b+5$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2a+5} < \sqrt{2b+5} \quad \text{car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est strictement croissante sur }]0; +\infty[$$

$$\Leftrightarrow 3 - \sqrt{2a+5} > 3 - \sqrt{2b+5} \quad (1,25)$$

$$\Leftrightarrow 3 - \sqrt{2a+5} > 3 - \sqrt{2b+5}$$

C'est-à-dire : $f(a) > f(b)$ Donc f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

$$b) \text{ Comme } u_n = f(n)$$

$$u_{n+1} = f(n+1)$$

$$\text{et } u_{n+1} - u_n = f(n+1) - f(n)$$

Comme f est décroissante (d'après a)).

①

$$u_{n+1} - u_n \leq 0, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

C'est-à-dire : (u_n) est strictement décroissante

c) Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = 3 - \sqrt{2(n+1)+5} - (3 - \sqrt{2n+5})$$

$$= -\sqrt{2n+7} + \sqrt{2n+5}$$

$$= \sqrt{2n+5} - \sqrt{2n+7}$$

$$= \frac{(\sqrt{2n+5} - \sqrt{2n+7})(\sqrt{2n+5} + \sqrt{2n+7})}{\sqrt{2n+5} + \sqrt{2n+7}}$$

$$= \frac{2n+5 - (2n+7)}{\sqrt{2n+5} + \sqrt{2n+7}} = \frac{-2}{\sqrt{2n+5} + \sqrt{2n+7}}$$

(15)

6) Or, $-2 < 0$

et $\sqrt{2n+5} + \sqrt{2n+7} > 0$

$\left. \begin{array}{l} -2 < 0 \\ \sqrt{2n+5} + \sqrt{2n+7} > 0 \end{array} \right\} \frac{-2}{\sqrt{2n+5} + \sqrt{2n+7}} < 0$
pour tout $n \in \mathbb{N}$

C'est-à-dire :

$u_{n+1} - u_n < 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

15)

Donc : (u_n) est strictement décroissante

Exercice 3)

$u_0 = 5$

$u_{n+1} = \frac{10u_n}{10+u_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) $u_1 = \frac{10u_0}{10+u_0} = \frac{10 \times 5}{10+5} = \frac{50}{15} = \frac{5 \times 10}{5 \times 3} = \frac{10}{3}$

① $u_2 = \frac{10u_1}{10+u_1} = \frac{10 \times \frac{10}{3}}{10 + \frac{10}{3}} = \frac{\frac{100}{3}}{\frac{30+10}{3}} = \frac{100}{40} = \frac{5}{2}$

alors : $u_1 - u_0 = \frac{10}{3} - 5 = \frac{10}{3} - \frac{15}{3} = -\frac{5}{3}$

et $u_2 - u_1 = \frac{5}{2} - \frac{10}{3} = \frac{15}{6} - \frac{20}{6} = -\frac{5}{6}$

D'où $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.

2) $v_{n+1} = \frac{5}{u_{n+1}} = \frac{5}{\frac{10u_n}{10+u_n}} = 5 \times \frac{10+u_n}{10u_n}$

①

$= \frac{10+u_n}{2u_n}$

Donc $v_{n+1} - v_n = \frac{10+u_n}{2u_n} - \frac{5}{u_n}$

$= \frac{10+u_n}{2u_n} - \frac{10}{2u_n} = \frac{u_n}{2u_n} = \frac{1}{2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Donc (v_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et de 1^{er} terme :

$v_0 = \frac{5}{u_0} = \frac{5}{5} = 1$

3) D'après la question 2) :

① $v_n = v_0 + n \times \frac{1}{2} = 1 + n \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}n + 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

4) Comme $v_n = \frac{5}{u_n}$, alors $u_n = \frac{5}{v_n}$

①

$= \frac{5}{\frac{1}{2}n + 1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice (4) $\frac{1}{4} u_n = \frac{1}{n^2} + 5$
 Pour $n \in \mathbb{N}^*$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: (5)

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{5+2u_n}{7-3u_n} \\ u_0 = -1 \end{cases}$$

1) A la calculatrice: (à 10^{-4} près)

n	u_n	$1/n$
5	5,0400	-2,8814
6	5,0278	-0,0488
10	5,0100	-37,8912
15	5,0044	5,4928
20	5,0029	2,9141
30	5,0011	1,5990
30	5,0004	0,5544

(3,5) (= $11 \times 0,25$).

(0,5) 2) Plus n augmente, plus u_n semble s'approcher de la valeur [5].

Exercice (5) 2

1) 1 (= $4 \times 0,25$).

i	1	2	3	4
u_i	(-17)	(-56)	(-173)	(-524)

Pour $i = 1$, u reçoit la valeur de u_1
 et $u_1 = 3u_0 - 5$
 $= 3 \times (-4) - 5$
 $= -17$

$$u_2 = 3u_1 - 5$$

$$= 3 \times (-17) - 5 = -51 - 5 = \underline{-56}$$

$$u_3 = 3 \times (-56) - 5$$

$$= -168 - 5 = \underline{-173}$$

$$u_4 = 3 \times (-173) - 5 = \underline{-524}$$

2) Cet algorithme calcule le terme de rang n (n étant entre par l'utilisateur) de la suite (u_n) définie par:

(1)

$$\begin{cases} u_0 = -4 \\ u_{n+1} = 3u_n - 5 \end{cases}$$

Variables
 S, n : nombre réel
 i, n : entiers naturels

Début
 n prend la valeur -4
 S prend la valeur -4

Boucle
 Pour i allant de 1 à n Faire
 u prend la valeur $3u - 5$

(BONUS)

Spécial la valeur S et n
 Fin
 Afficher S
 Fin.