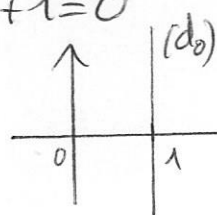


Exercice (1): $m \in \mathbb{R}$ $(d_m): (2m-1)x - my + 3m + 1 = 0$

1) Pour $m=0$ $(d_0): -x + 1 = 0$ (droite verticale).



- Pour $m=1$: $(d_1): x - y + 4 = 0$

- Pour $m=-1$: $(d_{-1}): -3x + y - 2 = 0$

2) Considérons (d_0) et (d_1) :

Elles sont sécantes

(d_0) est verticale et (d_1) est oblique.

Coordonnées du point d'intersection:

$$\begin{cases} -x + 1 = 0 \\ x - y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = x + 4 = 1 + 4 = 5 \end{cases} \text{ Donc } (d_0) \text{ et } (d_1) \text{ passent par le point } A(1; 5)$$

De manière générale: Soit $m \in \mathbb{R}$:

$$(2m-1) \times 1 - m \times 5 + 3m + 1 = 2m - 1 - 5m + 3m + 1 = 0$$

Donc $A(1; 5) \in (d_m)$

Par conséquent: Toutes les droites (d_m) passent par $A(1; 5)$

3) a) $B(-1; 4) \in (d_m) \Leftrightarrow (2m-1) \times (-1) - 4m + 3m + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow -2m + 1 - 4m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3m + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{m = \frac{2}{3}}$$

b) $\vec{u}(2; -1)$ $\vec{v}(\overbrace{m}^{\text{a}}; \overbrace{2m-1}^{\text{b}})$ vecteur directeur de (d_m)

$\vec{u}(2; -1)$ vecteur directeur de $(d_m) \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

$$\Leftrightarrow 2(2m-1) = -m$$

$$\Leftrightarrow 4m - 2 = -m \Leftrightarrow 5m = 2 \Leftrightarrow \boxed{m = \frac{2}{5}}$$

Exercice 2):

(2)

$$A(5; -2) \quad B(-3; 2) \quad C(1; -4) \quad \vec{u}(7; -1)$$

1) Equation cartésienne de (AB):

Soit $M(x; y) \in (AB)$:

$$\vec{AM}(x-5; y+2) \text{ et } \vec{AB}(-8; 4)$$

$$\vec{AM} \text{ et } \vec{AB} \text{ sont colinéaires } \Leftrightarrow 4(x-5) = -8(y+2)$$

$$\Leftrightarrow 4x - 20 + 8y + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x + 8y - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{x + 2y - 1 = 0} \text{ (Equation cartésienne de (AB))}$$

2) (d) a pour vecteur directeur $\vec{u}$ et passe par A(5; -2).

$$\text{Soit } M \in (d): \vec{AM}(x-5; y+2)$$

comme $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (d), alors $\vec{u}$ et $\vec{AM}$ sont colinéaires

$$\begin{aligned} \vec{AM}(x-5; y+2) \\ \vec{u}(7; -1) \end{aligned} \text{ colinéaires } \Leftrightarrow -1 \times (x-5) = 7(y+2)$$

$$\Leftrightarrow -x - 7y + 5 - 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow -x - 7y - 9 = 0$$

Donc (d) admet pour équation cartésienne:

$$\underline{-x - 7y - 9 = 0}$$

3) $(d_1) \parallel (AB)$ et $C \in (d_1)$

$$\text{Soit } M(x; y) \in (d_1), \quad \vec{CM}(x-1; y+4) \quad \begin{aligned} \vec{AB}(-3-5; 2-2) \\ \vec{AB}(-8; 4) \end{aligned}$$

comme $(d_1) \parallel (AB)$, alors $\vec{CM}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires

$$\text{c'est-à-dire: } 4(x-1) = -8(y+4)$$

$$\Leftrightarrow 4x + 8y - 4 + 32 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x + 8y + 28 = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 2y + 7 = 0$$

Donc (d_1) admet pour équation cartésienne $\underline{x + 2y + 7 = 0}$

4) a) (d): $-x - 7y - 9 = 0$ et $(d_1): x + 2y + 7 = 0$
 $\vec{u}(7; -1)$ est un vecteur directeur de (d) et $\vec{AB}$ est un vecteur directeur de (d_1)

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u}(7; -1) \\ \vec{AB}(-8; 4) \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_{\vec{u}} \times y_{\vec{AB}} = 7 \times 4 = 28 \\ y_{\vec{u}} \times x_{\vec{AB}} = -1 \times (-8) = 8 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \vec{u} \\ \vec{AB} \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{d'où } \vec{u} \text{ et } \vec{AB} \text{ ne sont} \\ \text{pas colinéaires} \end{array} \quad (3)$$

d'où (d) et (d_1) sont sécantes

b) (d) et (d_1) ont donc un point d'intersection :

Soit $I(x; y)$ ce point; $(x; y)$ vérifie le système :

$$\begin{cases} -x - 7y - 9 = 0 \\ x + 2y + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 7y = -9 \\ x + 2y = -7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -7 - 2y + 7y = -9 \\ x = -7 - 2y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5y = -2 \\ x = -7 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{2}{5} \\ x = -7 - 2 \times (-\frac{2}{5}) \\ \quad = -7 + \frac{4}{5} \\ \quad = -\frac{35}{5} + \frac{4}{5} = -\frac{31}{5} \end{cases}$$

Donc $I(-\frac{31}{5}; -\frac{2}{5})$

Exercice (3): $\vec{AC} = 2\vec{AD}$, $\vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{AB}$, $\vec{BC} = \frac{1}{2}\vec{BF}$

1) Dans $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$:

a) $A(0; 0)$ (origine du repère)

$\vec{AB} = 1\vec{AB} + 0\vec{AC}$ d'où $B(1; 0)$

$\vec{AC} = 0\vec{AB} + 1\vec{AC}$ d'où $C(0; 1)$

$\vec{AD} = \frac{1}{2}\vec{AC} = 0\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$ d'où $D(0; \frac{1}{2})$

$\vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{AB} + 0\vec{AC}$ d'où $E(\frac{1}{3}; 0)$

$\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{BF}$ (relation de Chasles)

$= \vec{AB} + 2(\vec{BA} + \vec{AC}) = \vec{AB} - 2\vec{AB} + 2\vec{AC} = -\vec{AB} + 2\vec{AC}$ d'où $F(-1; 2)$

b) $\vec{DE}(x_E - x_D; y_E - y_D)$ $\vec{DF}(x_F - x_D; y_F - y_D)$ $\left\{ \begin{array}{l} x_{\vec{DE}} \times y_{\vec{DF}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \\ y_{\vec{DE}} \times x_{\vec{DF}} = -\frac{1}{2} \times (-1) = \frac{1}{2} \end{array} \right.$

$(\frac{1}{3} - 0; 0 - \frac{1}{2})$ $(-1 - 0; 2 - \frac{1}{2})$

$(\frac{1}{3}; -\frac{1}{2})$ $(-1; \frac{3}{2})$

Donc $\vec{DE}$ et $\vec{DF}$ sont colinéaires avec un point en commun. Donc D, E et F sont alignés.

2) a) $\vec{AE} = \frac{1}{3} \vec{AB} \Leftrightarrow \vec{AD} + \vec{DE} = \frac{1}{3} \vec{AB}$ (relation de Chasles) (4)
 $\Leftrightarrow \frac{1}{2} \vec{AC} + \vec{DE} = \frac{1}{3} \vec{AB}$
 $\Leftrightarrow \underline{\vec{DE} = \frac{1}{3} \vec{AB} - \frac{1}{2} \vec{AC}}$

b) $\vec{DF} = \vec{DB} + \vec{BF}$ (relation de Chasles)
 $= \vec{DA} + \vec{AB} + 2 \vec{BC}$
 $= -\frac{1}{2} \vec{AC} + \vec{AB} + 2 \vec{BA} + 2 \vec{AC}$ (relation de Chasles)
 $\underline{\vec{DF} = -\vec{AB} + \frac{3}{2} \vec{AC}}$

c) $-3 \vec{DE} = -\vec{AB} + \frac{3}{2} \vec{AC} = \vec{DF}$

d'œ $\vec{DE}$ et $\vec{DF}$ sont colœnaires avec un point commun
 Donc D, E et F sont alignœs

Exercice (4):

1a) $u_1 = \frac{4}{5} u_0 - 1 = \frac{4}{5} \times (-2) - 1 = -\frac{8}{5} - \frac{5}{5} = \boxed{-\frac{13}{5}}$

$u_2 = \frac{4}{5} u_1 - 1 = \frac{4}{5} \times \left(-\frac{13}{5}\right) - 1 = -\frac{52}{25} - \frac{25}{25} = \boxed{-\frac{77}{25}}$

b) $u_1 - u_0 = -\frac{13}{5} - (-2) = -\frac{13}{5} + \frac{10}{5} = -\frac{3}{5}$
 $u_2 - u_1 = -\frac{77}{25} - \left(-\frac{13}{5}\right) = -\frac{77}{25} + \frac{65}{25} = -\frac{12}{25}$ } $\left. \begin{array}{l} u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1 \\ \text{Nœ œ } (u_n) \text{ n'est pas} \\ \text{arithmœtique.} \end{array} \right\}$

$\frac{u_1}{u_0} = \frac{-\frac{13}{5}}{-2} = \frac{13}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{13}{10}$

$\frac{u_2}{u_1} = \frac{-\frac{77}{25}}{-\frac{13}{5}} = -\frac{77}{25} \times \left(-\frac{5}{13}\right) = \frac{77}{5 \times 13} = \frac{77}{65}$

$\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ donc (u_n) n'est pas gœomœtrique

2) a) b) Voir la reprœsentation graphique.

c) Conjecture:

Plus n augmente, et plus u_n semble s'approcher de la valeur -5

3) $v_n = u_n + 5$

a) $v_{n+1} = u_{n+1} + 5 = \frac{4}{5}u_n - 1 + 5 = \frac{4}{5}u_n + 4$
 $= \frac{4}{5}(u_n + 5)$
 $= \frac{4}{5}v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{4}{5}$ et de 1^{ère} terme

$$v_0 = u_0 + 5 = -2 + 5 = \underline{3}$$

b) comme (v_n) géométrique:

$$v_n = v_0 \times q^n$$

$$\underline{v_n = 3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$$

c) comme $u_n = v_n - 5$

d'où $u_n = 3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n - 5$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

4) (v_n) suite géométrique

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

$$= v_0 \times \frac{1-q}{1-q} = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{4}{5}} = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}}{\frac{1}{5}}$$

$$\underline{S_n = 15 \times \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$$

b) $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$$= (v_0 - 5) + (v_1 - 5) + \dots + (v_n - 5)$$

$$= \underbrace{v_0 + v_1 + \dots + v_n}_{S_n} - 5 \times (n+1)$$

$$\underline{T_n = S_n - 5 \times (n+1) = 15 \times \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right) - 5(n+1), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$$

c) $-1 < \frac{4}{5} < 1$, d'où $\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ d'où $15 \times \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 15$

Question

Rais programme

$$-5(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$$

$$\text{d'où } \boxed{T_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty}$$

Exercice (5):

(6)

$$S = 3 + \frac{3}{5} + \frac{3}{25} + \dots + \frac{3}{15\,625}$$

$$= 3 \left(1 + \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \dots + \frac{1}{15\,625} \right)$$

avec $15\,625 = 5^6$

$$\text{d'où } S = 3 \times \left(\left(\frac{1}{5}\right)^0 + \left(\frac{1}{5}\right)^1 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{5}\right)^6 \right)$$

$$= 3 \times \left\{ 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^7}{1 - \frac{1}{5}} \right\} \quad \left(\text{somme des termes d'une suite géométrique de raison } \frac{1}{5} \right)$$

$$= 3 \times \frac{5}{4} \left[1 - \left(\frac{1}{5}\right)^7 \right]$$

$$\underline{S} = \underline{\frac{15}{4} \left[1 - \left(\frac{1}{5}\right)^7 \right]} \simeq \underline{3,75}$$