

Exercice 1):

1) Si $-2 \leq x \leq 0$, alors $x+2 \geq 0$ d'où $|x+2| = x+2$
(Réponse a)

2) $g(x) = ax^2 + b$

Comme la parabole représentant g est orientée vers le bas, alors $a < 0$
(ce qui exclut la proposition c).

$g(0) = a \cdot 0^2 + b = b$. Or, graphiquement, $g(0) = 3$
d'où $b = 3$

Donc $a = -2$ et $b = 3$ (Réponse a)

3) $p, q \in \mathbb{R}$ $f(x) = (x-p)^2 + q$ $g(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 10$

Remarque: Les expressions données sont les formes canoniques respectives de f et g .

$a = 1 > 0$ pour f d'où la parabole représentant f est orientée vers le haut

$a = -\frac{1}{2} < 0$ pour g d'où la parabole représentant g est orientée vers le bas.

- coordonnées du sommet de la parabole représentant f : $S(p; q)$

- coordonnées du sommet de la parabole représentant g : $S'(1; 10)$

Par lecture graphique: on a $p > 1$ et $q < 0$

(Réponse c)

4) $f(x) = 2x^2 + 2x - 24$

$= 2(x^2 + x) - 24$

$= 2\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] - 24$

$= 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - \frac{48}{2} = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{49}{2}$ (Réponse c)

5) $-\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} \geq 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 0$

d'où le trinôme est toujours du signe de a

et s'annule en $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{-1} = 1$
Or, $a = -\frac{1}{2} < 0$
Donc $-\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} \geq 0$
uniquement pour $x = 1$
Donc: $S = \{1\}$ (Réponse a)

6) Sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$: $R(x) = \frac{2}{4-x} - 1$

(2)

$$\left. \begin{aligned} 0 < x < 2 \\ \Rightarrow -2 < -x < 0 \\ \Rightarrow 2 < 4-x < 4 \\ \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{4-x} < \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{2}{4-x} < 1 \\ \Rightarrow -\frac{1}{2} < \frac{2}{4-x} - 1 < 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Donc } -\frac{1}{2} < R(x) < 0 \\ &(\text{Réponse } \textcircled{B}) \end{aligned}$$

Exercice (2):

1) N'après les données de l'énoncé: $0.8m \leq x \leq 12m$

2) $A(x)$: Aire du chemin en fonction de x

a) $A(x) = 30x + 12x - x^2$ (il faut enlever une fois l'aire du carré de côté x)
 $= -x^2 + 42x$

b) $A(x) = 41 \Leftrightarrow -x^2 + 42x - 41 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 42^2 - 4 \times (-1) \times (-41) = 1600 > 0$$

Nous l'équation admet deux solutions distinctes:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-42 + 40}{-2} = 1$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-42 - 40}{-2} = \frac{-82}{-2} = 41$$

Pour une largeur de 1m ou de 41m, l'aire du chemin sera de 41m²

3) Aire de la partie restante $= 30 \times 12 - A(x)$
 $= 360 - (-x^2 + 42x)$
 $= x^2 - 42x + 360$

Aire de la partie restante ≥ 280 $\Leftrightarrow x^2 - 42x + 360 \geq 280$
 $\Leftrightarrow x^2 - 42x + 80 \geq 0$

4) $x^2 - 42x + 80 \geq 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 42^2 - 4 \times 80$$

$$= 1444 > 0 \text{ d'où le trinôme admet deux racines distinctes}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{42 + \sqrt{1444}}{2} = \frac{42 + 38}{2} = 40$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{42 - \sqrt{1444}}{2} = \frac{42 - 38}{2} = 2$$

Le trinôme est du signe de a à l'extérieur de ses racines

Or, $a = 1 > 0$ d'où $x^2 - 42x + 80 \geq 0$ pour $x \in]-\infty; 2] \cup [40; +\infty[$

Mais, d'après les contraintes de l'énoncé :

$$x \in [0,8; 2]$$

Par conséquent: Pour une largeur du chemin comprise entre 0,8m et 2m, toutes les conditions sont vérifiées.

Exercice (3): $f(x) = x^2 - 6x + 8$

1) a) $a = 1 > 0$, d'où f est d'abord décroissante, puis croissante.

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2} = 3 \quad \beta = f(\alpha) = f(3) = 9 - 18 + 8 = -1$$

d'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
variation de f			

b) Signe de $f(x)$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 32 = 4 > 0$$

d'où le trinôme admet 2 racines distinctes:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 + 2}{2} = 4 \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 - 2}{2} = 2$$

Le trinôme est du signe de a à l'extérieur de ses racines. Or, $a = 1 > 0$

d'où le signe de $f(x)$:

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$	
signe de $f(x)$	+	0	-	0	+

2) $g(x) = \sqrt{f(x)}$

a) g est définie si et seulement si $f(x) \geq 0$. d'où: (d'après question 1b))

$$D_g =]-\infty; 2] \cup [4; +\infty[$$

b) sur $] -\infty; 2]$: Soient $a, b \in] -\infty; 2]$ avec $a < b$.

(4

on a $f(a) > f(b)$ car f décroissante sur $] -\infty; 3]$ d'où en particulier
sur $] -\infty; 2]$

d'où $\sqrt{f(a)} > \sqrt{f(b)}$ car $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$
c'est-à-dire $g(a) > g(b)$

Donc g est décroissante sur $] -\infty; 2]$

on raisonne de même sur $[4; +\infty[$:

Donc g est croissante sur $[4; +\infty[$.

D'où le tableau de variations de g :

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$
Variations de g				

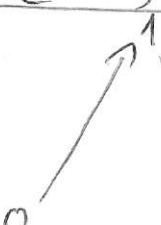
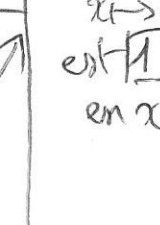
3) $h(x) = |f(x)|$

$$a) h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{pour } x \in] -\infty; 2] \cup [4; +\infty[\\ -f(x), & \text{pour } x \in [2; 4] \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 8, & \text{pour } x \in] -\infty; 2] \cup [4; +\infty[\\ -x^2 + 6x - 8, & \text{pour } x \in [2; 4] \end{cases}$$

b) - Les variations de $x \mapsto x^2 - 6x + 8$ ont été déterminées dans la question 1 a) Celles de $x \mapsto -x^2 + 6x - 8$ sont opposées

D'où le tableau suivant:

x	$-\infty$	2	3	4	$+\infty$
Variations de h					

le maximum de
 $x \mapsto -x^2 + 6x - 8$
est 1 et il atteint
en $x = 3$

4) $R(x) = \frac{1}{f(x)}$

a) R est définie si et seulement si $f(x) \neq 0$.

Donc $D_R = \mathbb{R} \setminus \{2; 4\}$

b) Sur $[3; 4[$

Soient $a, b \in [3; 4[$ avec $a < b$.

$f(a) < f(b)$ car f est croissante sur $[3; 4[$.

et $\frac{1}{f(a)} > \frac{1}{f(b)}$ car $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

c'est-à-dire $R(a) > R(b)$

Donc R est strictement décroissante sur $[3; 4[$

Exercice (4):

1) $a=2, b=1$ et $x=4$

y prend la valeur $2 \times 4 + 1 - \frac{1}{4} = 9 - \frac{1}{4} = \frac{36}{4} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{35}{4}}$

x n'est pas solution

2) Cet algorithme permet de résoudre l'équation $ax + b - \frac{1}{x} = 0$

3) $a=b=1$ et $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

4) La réponse n'est pas cohérente avec le résultat du 3) car $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ est solution de l'équation.

$$ax + b - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 1 - \frac{2}{\sqrt{5}-1}$$

$$= \frac{(\sqrt{5}-1)^2 + 2(\sqrt{5}-1) - 2 \times 2}{2(\sqrt{5}-1)}$$

$$= \frac{5 - 2\sqrt{5} + 1 + 2\sqrt{5} - 2 - 4}{2(\sqrt{5}-1)} = 0$$

Le message affiché est: " x est solution"