Corrigé du DS de mathématiques

(Fait le 03/03/16)

Exercice 1 :

$f(x) = 2\sqrt{x} + \frac{3}{x}$ $x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $[0;+\infty[$ et dérivable sur $]0;+\infty[$

$x \mapsto \frac{3}{x}$ définie et dérivable sur $]0;+\infty[$

D'où f est dérivable sur $I =]0;+\infty[$

$$f'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + 3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x^2}$$

$g(x) = \frac{-1}{5-2x}$ g est dérivable partout où elle est définie :

on peut donc dériver g sur $I =]\frac{5}{2};+\infty[$

On a : $g(x) = -1 \times \frac{1}{5-2x}$ – Or, $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

En posant $u(x) = 5-2x$, d'où $u'(x) = -2$

Donc : $g'(x) = -1 \times \left(-\frac{-2}{(5-2x)^2}\right) = \frac{-2}{(5-2x)^2}$

$h(x) = \frac{3x^2+5x-1}{x^2-3x+2}$ h est dérivable partout où elle est définie

or, h est définie si et seulement si $x^2-3x+2 \neq 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 8 = 1 > 0$: deux racines distinctes

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+1}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-1}{2} = 1$

d'où $D_h = \mathbb{R} \setminus \{1;2\}$

On peut donc dériver h sur $I =]2;+\infty[$

On pose : $u(x) = 3x^2+5x-1$ $u'(x) = 3 \times 2x + 5 = 6x+5$

$v(x) = x^2 - 3x + 2$ $v'(x) = 2x-3$

On a : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ d'où $h'(x) = \frac{(6x+5)(x^2-3x+2)-(2x-3)(3x^2+5x-1)}{(x^2-3x+2)^2}$

$$= \frac{\cancel{6x^3} - 18x^2 + 12x + 5x^2 - 15x + 10 - \cancel{6x^3} - 10x^2 + 2x + 9x^2 + 15x - 3}{(x^2-3x+2)^2}$$

$$h'(x) = \frac{-14x^2+14x+7}{(x^2-3x+2)^2}$$

Exercice 2 :

1) $f'(0)$: coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0

Par lecture graphique : $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{2} = 2$

Donc $f'(0) = 2$

$f'(1)$: coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1. Or, en $x = 1$, $(\mathcal{C}f)$ admet une tangente horizontale.

Donc : $f'(1) = 0$

2) Equation réduite de (T_0) : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$= 2x + 1$ (car $f(0) = 1$ par lecture graphique).

D'où (T_0) : $y = 2x+1$

3) En $x = 1$, $f'(1) = 0$ et f' change de signe en $x = 1$ car f change de variations en $x = 1$. (f étant décroissante juste avant $x = 1$ et croissante après)

Donc, en $x = 1$, f admet un minimum local valant 1.

4) Sur $[0;1]$, f change de variations : donc f n'est pas strictement positive sur cet intervalle.

5) On ne sait pas comment se comporte la courbe de f après $x = 2$.

On ne peut donc pas affirmer que : Pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq 1$

Exercice 3

$f(x) = \frac{2x}{x^2+9}$ définie sur $[0;+\infty[$

1) Sur l'écran de la calculatrice :

Conjecture : Sur $[0;+\infty[$, f semble atteindre son maximum en $x=3$

et le maximum valant $\frac{1}{3}$

2) a) $x^2+9 \neq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'où en particulier pour tout $x \in [0;+\infty[$

f est définie sur $[0;+\infty[$ et dérivable partout où elle est définie

D'où f est dérivable sur $[0;+\infty[$

On pose : $u(x) = 2x \qquad u'(x) = 2$

$v(x) = x^2+9 \qquad v'(x) = 2x$

On utilise : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ d'où $f'(x) = \frac{2(x^2+9)-2x \times 2x}{(x^2+9)^2}$

$$= \frac{-2x^2+18}{(x^2+9)^2} = \frac{2(9-x^2)}{(x^2+9)^2}$$

Donc : $f'(x) = \frac{2(3+x)(3-x)}{(x^2+9)^2}$, pour tout x

b) Étudions le signe de f' :

- Tout d'abord, $(x^2+9)^2 > 0$, pour tout $x \in D_f$
- Le signe de f' dépend donc de celui de $(3+x)(3-x)$

Or, sur $[0;+\infty[$, $3+x \geq 3 > 0$

et $3-x \geq 0 \iff x \leq 3$

d'où : $f'(x) \geq 0$ pour $x \in [0;3]$ et $f'(x) \leq 0$ pour $x \in [3;+\infty[$

D'où le tableau de variations de f :

x	0		3		$+\infty$
signe de f'		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	

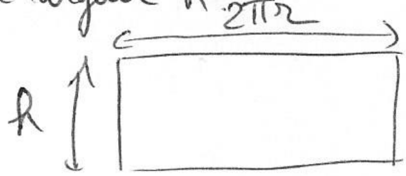
$f(0) = 0 \quad - \quad f(3) = \frac{6}{9+9} = \frac{1}{3}$

3) En $x = 3$, f' s'annule et change de signe.

D'après les variations, f admet un maximum local en $x=3$ et ce maximum vaut $\frac{1}{3}$

Exercice (4) :

1) La boîte est constituée de 2 disques de rayon r (= le dessus et le dessous) et d'une partie latérale pouvant être représentée par un rectangle de longueur $2\pi r$ et de largeur h.



D'où $S(r) = \underbrace{2 \times \pi r^2}_{\text{l'aire des 2 disques}} + \underbrace{2\pi r h}_{\text{Aire latérale}}$

Or, $V_{cylindre} = V = \pi r^2 h$ d'où $2\pi r h = \dfrac{2 \times \pi r^2 h}{r} = \dfrac{2V}{r}$

Par conséquent : $\underline{S(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{2V}{r}}$

2) a) S est définie si et seulement si $r \neq 0$

Donc $\underline{D_S =]0;+\infty[}$

b) S est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$

et $S'(r) = 2\pi \times 2r - \dfrac{2V}{r^2}$

$= 4\pi r - \dfrac{2V}{r^2} = \dfrac{4\pi r^3 - 2V}{r^2}$

on a : $r^2 > 0$, pour tout $r \in]0;+\infty[$

$4\pi r^3 - 2V \geq 0 \iff 4\pi r^3 \geq 2V$

$\iff 2\pi r^3 \geq V$

$\iff r^3 \geq \dfrac{V}{2\pi}$

$\iff r \geq \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$

D'où les variations de S :

r	0	$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$	$+\infty$
signe de S'	$-$	0	$+$
variation de S	↘	$S\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)$	↗

$S\left(\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}\right) = 2 \times \pi \times \left(\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}\right)^2 + \dfrac{2V}{\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}}$

$\underline{\text{En } r_0} = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$, S' s'annule et change de signe.

S admet alors un minimum local valant $2\pi \times \left(\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}\right)^2 + \dfrac{2V}{\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}}$

On a : $\underline{\underline{h_0}} = \dfrac{V}{\pi r_0^2} = \dfrac{V}{\pi \times \left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^2}$ (h_0 et r_0 étant les dimensions de la boîte choisie).

Exercice 5 :

$$f(x) = (1+x)^3$$

1) a) $(1+x)^3 = (1+x)^2 \times (1+x)$
$= (1+2x+x^2) \times (1+x)$
$= 1+x+2x+2x^2+x^2+x^3$
$= x^3+3x^2+3x+1$

D'où $f(x) = x^3+3x^2+3x+1$ f est donc une fonction polynôme de degré 3

f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\underline{f'(x)} = 3x^2 + 3\times 2x + 3$$
$$= \underline{3x^2+6x+3}$$

b) $(T) : y = f'(0)(x-0) + f(0)$ (car (T) tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0)
$= 3x+1$

Donc : $\underline{(T) : y = 3x+1}$

2) $g(x) = (1+x)^3 - (1+3x)$

a) g est une fonction polynôme de degré 3, d'où g est dérivable sur $\mathbb{R}$

On a : $g(x) = f(x) - (1+3x)$

d'où $g'(x) = f'(x) - 3 = 3x^2+6x+\cancel{3}-\cancel{3} = 3x(x+2)$

Étude du signe de g' :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
Signe de $3x$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $3x(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
Signe de g'		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de g		$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	

$g(-2) = (1-2)^3 - (1-6)$
$= -1+5$
$= 4$

$g(0) = 0$

b) Sur $[-2;2]$, g' s'annule une seule fois et change de signe (en $x=0$)
d'où 0 est un minimum local de g en $x=0$

Donc : $g(x) \geq 0$, pour tout $x \in [-2;2]$

c) c'est-à-dire : $f(x) - (1+3x) \geq 0$ pour tout $x \in [-2;2]$

$\Leftrightarrow f(x) \geq 1+3x$, pour tout $x \in [-2;2]$

Donc : $(\mathcal{C}_f)$ est située au-dessus de (T) sur l'intervalle $[-2;2]$.