CORRIGÉ Fait le

Première S4	**Contrôle de mathématiques** *Dérivation*	Jeudi 04/02/2016

- Calculatrice autorisée

Observations :

NOTE :

Exercice 1 : /7

Soit $f(x) = 2x^3 - 8x^2 + 7$

1) Justifier brièvement que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme.

(1)

2) Calculer f '(2) de deux manières **différentes** :

Méthode 1 :	**Méthode 2 :**
Soit $h \neq 0$, $\tau(h) = \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ or $f(2+h) = 2(2+h)^3 - 8(2+h)^2 + 7$ $= 2(2+h)(4+4h+h^2) - 8(4+4h+h^2) + 7$ $= (4+2h)(4+4h+h^2) - 32 - 32h - 8h^2 + 7$ $= 16 + 16h + 4h^2 + 8h + 8h^2 + 2h^3 - 25 - 32h - 8h^2$ $= 2h^3 + 4h^2 - 8h - 9$ $\tau(h) = \frac{2h^3 + 4h^2 - 8h - 9 - (2\times 2^3 - 8\times 2^2 + 7)}{h}$ $= \frac{h(2h^2 + 4h - 8)}{h} = 2h^2 + 4h - 8$ or, $2h^2 + 4h - 8$ a une limite finie quand $h \to 0$ d'où $f'(2)$ existe et : $f'(2) = \lim_{h\to 0} \tau(h) = \boxed{-8 = f'(2)}$	f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (question 1)) $f'(x) = 2\times 3x^2 - 8\times 2x$ $= 6x^2 - 16x$ D'où : $f'(2) = 6\times 2^2 - 16\times 2$ $= 24 - 32$ $= -8$

(3) (2)

3) Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2 :

(1) $(T_2) : y = f'(2)(x-2) + f(2)$
$= -8(x-2) - 9$ Donc : $(T_2) : y = -8x + 7$

Exercice 2 : /9

Voici les expressions en fonction de x de quatre fonctions :

$f(x) = 3\sqrt{x} + \frac{1}{x}$	$g(x) = (6x + 3)(x - 1)^2$
$h(x) = \frac{1}{3x^2+5}$	$i(x) = \frac{9x+2}{7x-5}$

Pour chaque fonction, déterminer son domaine de dérivabilité et calculer sa dérivée :

(1,5)

$x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$
D'où f est dérivable sur $]0;+\infty[$

$f'(x) = 3\times\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$

$= \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{2x^2} = \frac{3\sqrt{x}-2}{2x^2}$

(2,5)

$g(x) = (6x+3)(x^2-2x+1)$
$= 6x^3-12x^2+\cancel{6x}+3x^2-\cancel{6x}+3$
$= 6x^3-9x^2+3$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est un polynôme.

$g'(x) = 6\times 3x^2 - 9\times 2x$
$= 18x^2-18x$

(3)

$h(x) = \frac{1}{3x^2+5}$, $3x^2+5 \neq 0$, pour tout $x\in\mathbb{R}$.

d'où $D_f = \mathbb{R}$.
Alors : h est dérivable sur $\mathbb{R}$.
on pose $u(x) = 3x^2+5$ $u'(x) = 3\times 2x = 6x$

On a :
$h'(x) = \frac{-u'(x)}{(u(x))^2} = \frac{-6x}{(3x^2+5)^2}$

(3)

$i(x) = \frac{9x+2}{7x-5}$ i est définie si et seulement si $7x-5\neq 0$

$D_i = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{5}{7}\right\}$

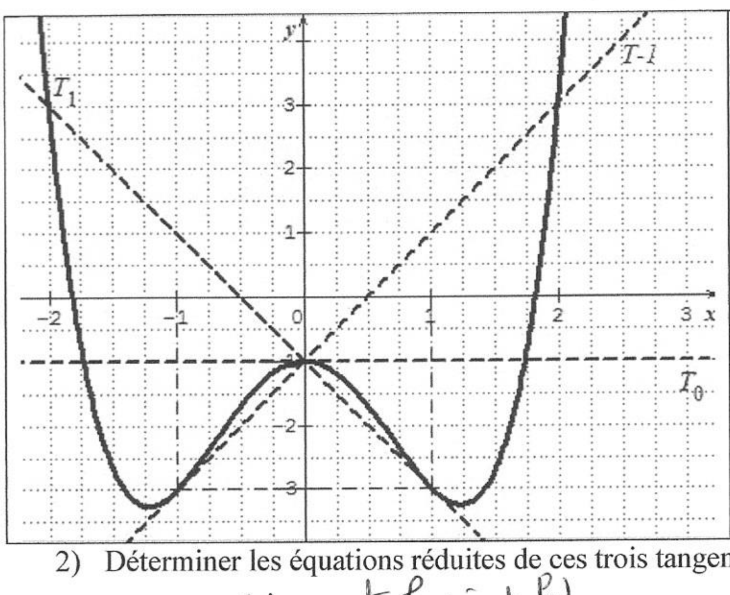
on peut se placer sur $]\frac{5}{7};+\infty[$ pour la dérivabilité de i :
$u(x) = 9x+2$ $u'(x) = 9$
$v(x) = 7x-5$ $v'(x) = 7$

$i'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{9(7x-5)-7(9x+2)}{(7x-5)^2}$

$= \frac{-45-14}{(7x-5)^2} = \boxed{\frac{-59}{(7x-5)^2}}$

Exercice 3 : /4

Dans un repère orthogonal du plan, on a représenté la courbe d'une fonction f ainsi que trois de ses tangentes : (T_0) , (T_{-1}) et (T_1)



1) Déterminer f '(0) ,f '(-1) et f '(1) en justifiant :

(0,5)

$f'(0)$: coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 $= a_{(T_0)} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$

(tangente horizontale).

d'où $f'(0) = 0$

De même :

(1)

$f'(-1) = a_{(T_{-1})} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{1} = 2$

(1)

$f'(1) = a_{(T_1)} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{1} = -2$

2) Déterminer les équations réduites de ces trois tangentes :

(0,5) (T_0) : $y = -1$ (tangente horizontale)

(0,5) (T_{-1}) : $y = f'(-1)(x+1)+f(-1) = 2(x+1)-3$ d'où $\boxed{(T_{-1}) : y = 2x-1}$

(0,5) (T_1) : $y = f'(1)(x-1)+f(1) = -2(x-1)-3$
$= -2x-1$ donc : $\boxed{(T_1) : y = -2x-1}$