

Exercice (1):

1) $f'(0)$: coefficient directeur de la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0 (il s'agit ici de la droite T)

$$f'(0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3}{1} = \boxed{-3}$$

$f'(1)$: coefficient directeur de la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 1.

Or, cette tangente est horizontale.

D'où son coefficient directeur est nul.

c'est-à-dire $\boxed{f'(1) = 0}$

2) Equation réduite de (T) :

$$(T): y = f'(0)(x - 0) + f(0).$$

$$= -3x + 0 \quad (\text{car } f(0) = 0 \text{ et } f'(0) = -3).$$

$$\boxed{(T): y = -3x}$$

3) - Sur $[-3; 1]$: f est décroissante d'où $f'(x) \leq 0$
 - Sur $[1; 3]$: f est croissante d'où $f'(x) \geq 0$.

Tableau de signes:

x	-3	1	3
signe de $f'(x)$	-	0	+

4) - Tout d'abord $f'(1) = 0$: le schéma (1) ne convient pas
 - D'autre part, $f'(0) = -3$: le schéma (2) ne convient pas

La courbe de f' est représentée sur le schéma (3)

Exercice (2):

Partie (A):

$$f(x) = \frac{3x(x+96)}{x-4} \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \{4\}$$

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$

$$\text{On pose } u(x) = 3x^2 + 288x$$

$$v(x) = x - 4$$

$$u'(x) = 6x + 288$$

$$v'(x) = 1$$

$$\text{On a: } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\text{d'où } f'(x) = \frac{(6x+288)(x-4) - (3x^2+288x)}{(x-4)^2}$$

$$= \frac{6x^2 - 24x + 288x - 1152 - 3x^2 - 288x}{(x-4)^2}$$

$$= \frac{3x^2 - 24x - 1152}{(x-4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3(x^2 - 8x - 384)}{(x-4)^2}$$

$$2) (x-4)^2 > 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$$

Étude du signe de $x^2 - 8x - 384$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 64 + 4 \times 384 = 1600 > 0$$

Donc l'équation admet deux racines distinctes:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 + 40}{2} = 24$$

et

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 - 40}{2} = -16$$

Le trinôme est du signe de a à l'extérieur de ses racines. Or $a = 1 > 0$

$$\text{Donc: } f'(x) \geq 0 \text{ pour } x \in]-\infty; -16] \cup [24; +\infty[$$

$$\text{et } f'(x) \leq 0 \text{ pour } x \in [-16; 4[\cup]4; 24]$$

Donc le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	-16	4	24	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\nearrow 192$	$\searrow$	$\nearrow 432$	

$$f(-16) = 192$$

$$f(24) = 432$$

3) Soit la droite $(d) : y = x + 3$.

Coefficient directeur de $(d) = 1$

Soit (T_a) : tangente à (C_f) en $x = a$.

$$(T_a) : y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Coefficient directeur de $(T_a) : f'(a)$.

On a :

$$(d) \parallel (T_a) \Leftrightarrow f'(a) = 1.$$

$$\text{on, } f'(a) = \frac{3(a^2 - 8a - 384)}{(a - 4)^2}$$

$$\text{d'où } \frac{3(a^2 - 8a - 384)}{(a - 4)^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow 3(a^2 - 8a - 384) = (a - 4)^2$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 - 24a - 1152 = a^2 - 8a + 16$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 - 16a - 1168 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 8a - 584 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 64 + 4 \times 584 = 2400 > 0.$$

L'équation admet donc 2 solutions distinctes.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 + \sqrt{2400}}{2} = \frac{8 + 20\sqrt{6}}{2} = 4 + 10\sqrt{6}$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 - \sqrt{2400}}{2} = \frac{8 - 20\sqrt{6}}{2} = 4 - 10\sqrt{6}$$

Aux points de la courbe d'abscisses $4 - 10\sqrt{6}$ et $4 + 10\sqrt{6}$, la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x + 3$.

Il y a 2 solutions en tout.

Partie (B).

$$S(x) = xy$$

1) Consideons le rectangle ci se trouve le texte imprimé :

Ses dimensions sont : $y - 3$ et $x - 4$ et son aire est 300 cm^2 .

D'au $(y-3) \times (x-4) = 300$

$\Leftrightarrow yx - 4y - 3x + 12 = 300$

$\Leftrightarrow y(x-4) = 3x + 300 - 12$

$\Leftrightarrow y = \frac{3x + 288}{x-4}$

$x > 4$: sinon
il n'y aurait
pas de rectangle
pour le box
minimum.

(1)

2) Alors : $S(x) = x \times \frac{3x + 288}{x-4}$

$$= \frac{x \times (3x + 3 \times 96)}{x-4}$$

$$= \frac{3x(x + 96)}{x-4} = f(x)$$

3) Dans la partie (A), l'étude des variations de f s'est faite
sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$

On, $x > 4$ dans la partie (B)

d'au le tableau suivant :

x	4	24	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$			432

f s'annule et change de signe en $x = 24$.

Compte-tenu des variations de f , f admet donc en $x = 24$ un
minimum local. Ce minimum est absolu sur $]4; +\infty[$

Surface minimale pour $x = 24$ cm

et $y = \frac{288 + 3 \times 24}{24 - 4} = \underline{\underline{18 \text{ cm}}}$

Cette surface minimale sera donc de $\underline{\underline{432 \text{ cm}^2}}$

Exercice (3) :

1) a) Pour 2016, il faut calculer a_1

On a $a_1 = 2150 \times \frac{75}{100} + 200 = 1812,5$

D'au environ 1813 adhérents pour l'année 2016

En 2014:

(3)

$$1812,5 \times \frac{75}{100} + 200 \simeq 1559.$$

En 2014, il y aura environ 1559 adhérents

b) D'une année sur l'autre, 75% renouvellent leur adhésion et 200 s'ajoutent.

Donc en $2015 + n + 1$ le nombre d'adhérents étant a_{n+1} il se calcule par :

$$a_{n+1} = \frac{75}{100} \times a_n + 200$$

$$a_{n+1} = 0,75 a_n + 200, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{aligned} c) \quad a_0 &= 2150 \\ a_1 &= 1812,5 \\ a_2 &= 1559,375 \end{aligned}$$

$$a_1 - a_0 \neq a_2 - a_1$$

d'où (a_n) n'est pas arithmétique

$$\frac{a_1}{a_0} \neq \frac{a_2}{a_1}, \text{ d'où } (a_n) \text{ n'est pas géométrique}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, $b_n = a_n - 800$

$$\begin{aligned} a) \quad b_{n+1} &= a_{n+1} - 800 \\ &= 0,75 a_n + 200 - 800 \\ &= 0,75 a_n - 600 \\ &= 0,75 (a_n - 800) \\ &= 0,75 b_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Donc : (b_n) est une suite géométrique de raison 0,75 et de 1^{re} terme $b_0 = a_0 - 800 = 2150 - 800 = 1350$

b) Comme (b_n) est géométrique :

$$b_n = b_0 \times q^n = 1350 \times 0,75^n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$c) \text{ Or, } a_n = b_n + 800$$

$$\text{d'où } a_n = 1350 \times 0,75^n + 800, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

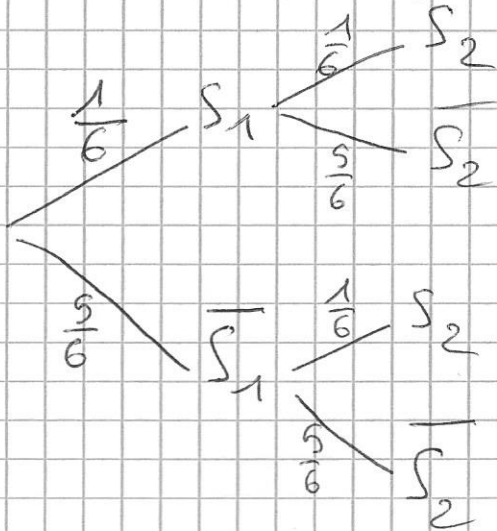
$$d) \text{ En } 2028 = 2015 + 13 \text{ d'où } n = 13$$

$$a_{13} = 1350 \times 0,75^{13} + 800 \simeq 832 \text{ membres en } 2028$$

Exercice (4) :

6

1) On modélise la situation à l'aide d'un arbre pondéré :



2) a) X ne peut prendre que les valeurs suivantes : $\{11; 3; -2\}$

R	11	3	-2
P(X=R)	$\frac{1}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{25}{36}$

$$P(X=11) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$P(X=3) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{10}{36}$$

$$P(X=-2) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$

$$\begin{aligned} b) E(X) &= 11 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{10}{36} - 2 \times \frac{25}{36} \\ &= \frac{11}{36} + \frac{30}{36} - \frac{50}{36} \\ &= -\frac{9}{36} = \boxed{-\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

c) $E(X) < 0$ donc le jeu est défavorable au joueur. Soit a la mise cherchée.

$$\begin{aligned} E(X) &= (13-a) \times \frac{1}{36} + (5-a) \times \frac{10}{36} + (0-a) \times \frac{25}{36} \\ &= \frac{13-a+50-10a-25a}{36} \\ &= \frac{63-36a}{36} \end{aligned}$$

$$\text{Jeu équitable} \Leftrightarrow E(X)=0 \Leftrightarrow \frac{63-36a}{36}=0 \Leftrightarrow 63-36a=0$$

(7)

$$\Leftrightarrow 36a = 63$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{63}{36} = \frac{9 \times 7}{9 \times 4} = \left[\frac{7}{4} \right] = 1,75$$

Pour une mise de 1,75 €, le jeu est équitable.

- 3) Mise de 4 €
- Si 6 numéros sortent sur chaque dé : on gagne 26 €
 - Si 6 numéros sortent sur un seul dé : on gagne 10 €
 - Rien sinon.

$$Z \text{ prend les valeurs : } \{22; 6; -4\}$$

$$\text{Alors } \boxed{Z = 2X}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } E(Z) &= E(2X) = 2E(X) \\ &= 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = \boxed{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Exercice (5):

$$\vec{AD} = \frac{1}{2} \vec{AC} \quad ; \quad \vec{AE} = \frac{1}{3} \vec{AB} \quad , \quad \vec{BF} = 2 \vec{BC}$$

1) Dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$:

$$\begin{aligned} \text{a) } \vec{AD} &= 0 \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AC} \quad \text{d'où } \boxed{D(0; \frac{1}{2})} \\ \vec{AE} &= \frac{1}{3} \vec{AB} + 0 \vec{AC} \quad \text{d'où } \boxed{E(\frac{1}{3}; 0)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{BF} = 2 \vec{BC} &\Leftrightarrow \vec{BA} + \vec{AF} = 2 \vec{BA} + 2 \vec{AC} \quad (\text{relation de Chasles}) \\ &\Leftrightarrow \vec{AF} = -2 \vec{AB} + \vec{AB} + 2 \vec{AC} \\ &\Leftrightarrow \vec{AF} = -\vec{AB} + 2 \vec{AC} \quad \text{d'où } \boxed{F(-1; 2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \vec{DE} &(x_E - x_D; y_E - y_D) & \vec{DF} &(x_F - x_D; y_F - y_D) \\ &(\frac{1}{3} - 0; 0 - \frac{1}{2}) & &(-1 - 0; 2 - \frac{1}{2}) \\ &(\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}) & &(-1; \frac{3}{2}) \end{aligned}$$

$$-3 \times x_{\vec{DE}} = -3 \times \frac{1}{3} = -1 = x_{\vec{DF}}$$

$$\text{et } -3 \times (-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} = y_{\vec{DF}}$$

$$\left. \begin{aligned} -3 \times x_{\vec{DE}} &= x_{\vec{DF}} \\ \text{et } -3 \times y_{\vec{DE}} &= y_{\vec{DF}} \end{aligned} \right\} \text{d'où } \vec{DF} = -3 \vec{DE}$$

donc $\vec{DF}$ et $\vec{DE}$ sont colinéaires avec un pt commun. Donc D, E, F alignés.

2) Avec les vecteurs:

$$a) \vec{AE} = \frac{1}{3} \vec{AB}$$

$$\Rightarrow \vec{AD} + \vec{DE} = \frac{1}{3} \vec{AB} \quad (\text{relation de Chasles})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{DE} &= \frac{1}{3} \vec{AB} - \vec{AD} \\ &= \frac{1}{3} \vec{AB} - \frac{1}{2} \vec{AC} \end{aligned}$$

$$b) \vec{BF} = 2 \vec{BC}$$

$$\Rightarrow \vec{BA} + \vec{AD} + \vec{DF} = 2 \vec{BA} + 2 \vec{AC} \quad (\text{relation de Chasles})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{DF} &= \vec{BA} - \vec{AD} + 2 \vec{AC} \\ &= -\vec{AB} - \frac{1}{2} \vec{AC} + 2 \vec{AC} \\ \vec{DF} &= -\vec{AB} + \frac{3}{2} \vec{AC} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) -3 \vec{DE} &= -3 \times \left[\frac{1}{3} \vec{AB} - \frac{1}{2} \vec{AC} \right] \\ &= -\vec{AB} + \frac{3}{2} \vec{AC} = \vec{DF} \end{aligned}$$

Nous $\vec{DE}$ et $\vec{DF}$ sont colinéaires avec un point commun, donc:

D, E et F sont alignés

Exercice (6):

$$1) K \text{ est le milieu de } [AB], \text{ d'où } x_K = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1 + (-3)}{2} = -2$$

$$y_K = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3 + (-4)}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Donc } K(-2; -\frac{1}{2})$$

$$2) L(2; 1) \quad \vec{BL} (x_L - x_B; y_L - y_B) \\ (2 + 3; 1 + 2) \\ (5; 3)$$

Soit $M(x; y) \in (BL)$: $\vec{BM}$ et $\vec{BL}$ sont colinéaires.

$$\vec{BM} (x + 3; y + 2)$$
$$\vec{BM} \text{ et } \vec{BL} \text{ colinéaires } \Rightarrow 5(y + 2) = 3(x + 3)$$

$$\Rightarrow 3x - 5y - 1 = 0$$

$$\text{N'ait } (BL): 3x - 5y - 1 = 0$$

3) (d): $3x + 14y - 1 = 0$

a) $3 \times (-2) + 14 \times \frac{1}{2} - 1 = -6 + 7 - 1$
 $= -7 + 7 = 0$

d'où $\boxed{K \in (d)}$

$3 \times 5 + 14 \times (-1) - 1 = 15 - 14 - 1$
 $= 0$

d'où $\boxed{C \in (d)}$ (donc: $(d) = (CK)$)

b) K étant le milieu de $[AB]$ et C le sommet de ABC opposé à $[AB]$

Donc (CK) est une médiane du triangle ABC

(c'est la médiane issue de C)

4) Soit $G(x; y)$ tel que G point d'intersection de (BL) et (d) .
 $(x; y)$ solution du système:

$$\begin{cases} 3x + 14y - 1 = 0 \\ 3x - 5y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 14y = 1 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 14y = 1 \\ 19y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = 0 \end{cases}$$

donc $G\left(\frac{1}{3}; 0\right)$

L est le milieu de $[AC]$ et B sommet du triangle ABC opposé à $[AC]$
d'où (BL) est une autre médiane du triangle

Par conséquent:

G est le centre de gravité du triangle ABC