CORRIGE

NOM :..PRENOM :..

Première 6S	**DS de mathématiques** *Second degré*	01/10/15

- Calculatrice autorisée
- Durée : 1h30
- **Le sujet est à rendre**

Observations :

NOTE :

/20

Total/28 :14 x10

Exercice 1 : (A faire sur le sujet) 4

Soit $P(x) = 3x^4 - 69x^2 - 54x + 120$

1) Montrer que $P(x) = (x^2 - x - 20)(3x^2 + 3x - 6)$

$$(x^2-x-20)(3x^2+3x-6) = 3x^4 + \cancel{3x^3} - 6x^2 - \cancel{3x^3} - 3x^2 + 6x - 60x^2 - 60x + 120$$
$$= 3x^4 - 69x^2 - 54x + 120$$

1

Donc : $\underline{P(x) = (x^2-x-20)(3x^2+3x-6)}$

2) En déduire le calcul des antécédents de 0 par P

x antécédent de 0 par $P \iff P(x) = 0$

$\iff (x^2-x-20)(3x^2+3x-6) = 0$

$\iff x^2-x-20 = 0$ ou $3x^2+3x-6 = 0$

1,5

$\Delta = b^2 - 4ac$
$= 1 + 80 = 81 > 0$ d'où l'équation admet 2 solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+9}{2} = 5$

$x_2 = \frac{1-9}{2} = -4$

$\Delta = b^2 - 4ac$
$= 9 + 24 \times 3$
$= 81 > 0$ d'où l'équation admet 2 solutions distinctes. $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+9}{6} = 1$

et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-9}{6} = -2$

Donc les antécédents de 0 par P sont : $\underline{\{-4 ; 5 ; 1 ; -2\}}$

1,5

3) Résoudre $P(x) \geq 0$

Notons $P_1(x) = x^2 - x - 20$ et $P_2(x) = 3x^2+3x-6$

Les 2 binômes ont un $\Delta > 0$.

Ils ont tous les 2 un $a > 0$

Les 2 binômes sont positifs à l'extérieur de leurs racines respectives :

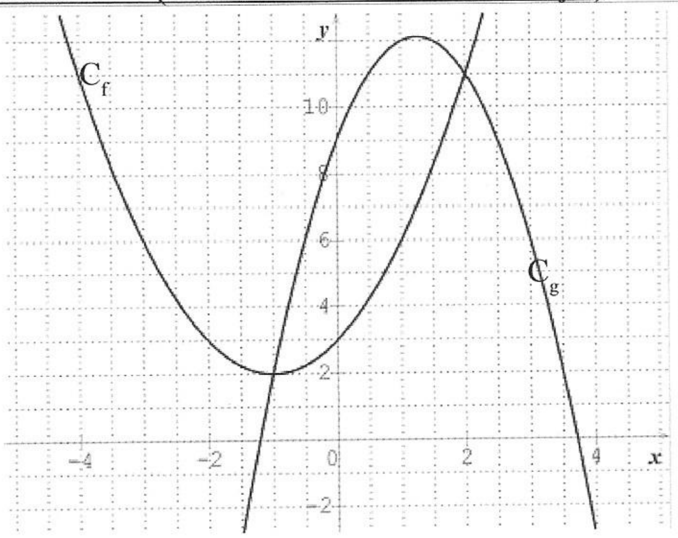
D'où le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	-4		-2		1		5	$+\infty$
signe de x^2-x-20	+	0	−		−		−	0	+
signe de $3x^2+3x-6$	+		+	0	−	0	+		+
signe de P	+	0	−	0	+	0	−	0	+

Donc $\underline{S =]-\infty ; -4] \cup [-2 ; 1] \cup [5 ; +\infty[}$

6

Exercice 2 : (A faire directement sur le sujet)



Représentations graphiques de deux fonctions f et g définies sur ℝ dans le même repère orthogonal du plan.

2) $f(x) > g(x) \iff f(x) - g(x) > 0$

$\iff 3x^2 - 3x - 6 > 0$

D'après 1), on sait que le binôme admet 2 racines distinctes : $x_1 = 2$ et $x_2 = -1$

Le binôme est du signe de a à l'extérieur de ses racines. Or, $a = 3 > 0$

D'où $3x^2 - 3x - 6 > 0$ pour $x \in]-\infty ; -1[\cup]2 ; +\infty[$

Donc $S =]-\infty ; -1[\cup]2 ; +\infty[$

1,5

1) Résoudre f(x) = g(x) graphiquement en justifiant : Les solutions cherchées sont les abscisses des points d'intersection des 2 courbes $S = \{-1 ; 2\}$

1,5

2) Résoudre f(x) > g(x) graphiquement en justifiant : Les solutions sont les abscisses des points de C_f situés strictement au-dessus de C_g.

Donc $S =]-\infty ; -1[\cup]2 ; +\infty[$

1,5

3) On donne des expressions en fonction de x des deux fonctions :

$f(x) = x^2 + 2x + 3$ et $g(x) = -2(x - \frac{5}{4})^2 + \frac{87}{8}$

Retrouver les résultats des questions 1) et 2) algébriquement

1) $f(x) = g(x)$

$\iff x^2 + 2x + 3 = -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{87}{8}$

$\iff x^2 + 2x + 3 = -2\left(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{16}\right) + \frac{87}{8}$

$\iff x^2 + 2x + 3 = -2x^2 + 5x - \frac{25}{8} + \frac{87}{8}$

$\iff 3x^2 - 3x + 3 - 9 = 0$

$\iff 3x^2 - 3x - 6 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 9 + 4 \times 3 \times 6$

$= 81 > 0$ d'où l'équation admet 2 solutions distinctes. $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+9}{6} = 2$

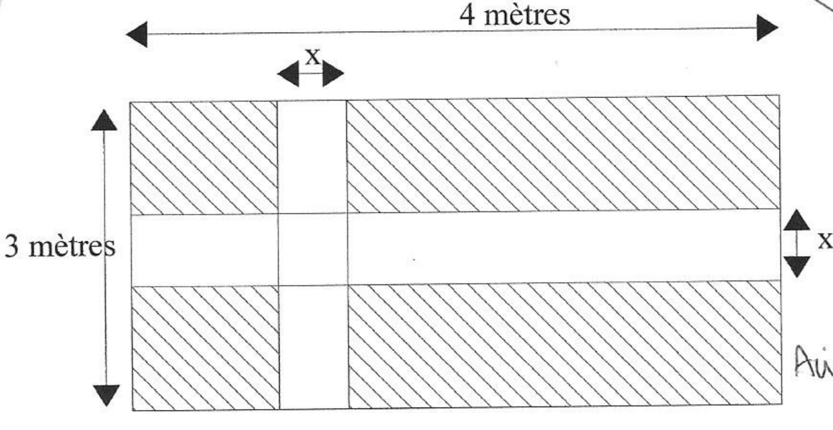
et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-9}{6} = -1$

Donc $S = \{2 ; -1\}$

1,5

3

Exercice 3 : (A faire sur votre copie)



Aire (Croix Blanche) $= 4x + 3x - x^2$ (il faut enlever une fois l'aire du carré intersection)

1

Aire (Partie hachurée) = Aire (Totale) − Aire (Croix)

$= 4 \times 3 - 7x + x^2 = x^2 - 7x + 12$

1

Calculer x pour que l'aire de la croix blanche soit égale à celle de la partie hachurée.

On doit donc résoudre : $x^2 - 7x + 12 = -x^2 + 7x \iff 2x^2 - 14x + 12 = 0$

$\Delta = (-14)^2 - 4 \times 2 \times 12 = 100 > 0$. 2 solutions : $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{14+10}{4} = 6$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{14-10}{4} = 1$

Or, $0 \leq x \leq 3$ donc seule solution $\boxed{x = 1 \text{ m}}$

1

$x_1+x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \boxed{-\frac{b}{a}}$

/4

Exercice 4 : (A faire sur votre copie)

On considère un trinôme du second degré f admettant deux racines distinctes : x_1 et x_2

Notons $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$

1 — 1) Démontrer soigneusement que $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$

1,5 — 2) Démontrer soigneusement que $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

0,5 — 3) a) Vérifier que -1 est racine évidente de f si $f(x) = x^2 - 3x - 4$

1 — b) Calculer l'autre racine de f en utilisant un des résultats précédents.

$x_1 \times x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \times \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

$= \frac{1}{4a^2}\left[(-b+\sqrt{\Delta})(-b-\sqrt{\Delta})\right]$

$= \frac{1}{4a^2}\left[(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2\right] = \frac{1}{4a^2}\left[b^2-(b^2-4ac)\right]$

$= \frac{1}{4a^2} \times 4ac = \boxed{\frac{c}{a}}$

3a) $f(-1) = (-1)^2 - 3\times(-1) - 4 = 1+3-4 = 0$

d'où -1 est racine de f

/5

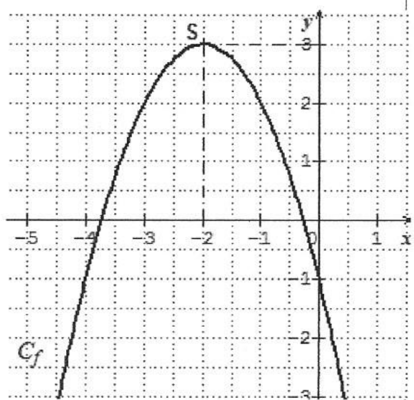
Exercice 5 : (A faire directement sur le sujet)

QCM

b) $x_2 \times (-1) = \frac{c}{a} = \frac{-4}{1} = -4$ Donc $x_2 = 4$

Donc $S = \{-1 ; 4\}$

Entourer la bonne réponse à chaque fois : (sans justification)

Questions	Proposition A	Proposition B	Proposition C	Proposition D
1) L'équation $3x^2 + 5x - 2 = 0$ admet :	Une solution unique	Pas de solution réelle	Deux solutions de même signe	Deux solutions de signes opposés.
2)  La forme canonique de f est :	$-(x-2)^2+3$	$-(x+2)^2+3$	$(x+2)^2+3$	$(x-2)^2-3$
3) L'ensemble des solutions de l'inéquation : $5x^2 - 4x - 1 < 0$	$]-\frac{1}{5} ; 1[$	$]-\infty ; -\frac{1}{5}[$	$]-\infty ; -\frac{1}{5}[\cup]1 ; +\infty[$	$[-\frac{1}{5} ; 1]$
4) Soit f définie sur ℝ par $f(x) = x^2 - 2x - 5$. Les racines de f sont :	$1-\sqrt{6}$ et $1+\sqrt{6}$	- 1 et 3	$-1-\sqrt{6}$ et $-1+\sqrt{6}$	$2-2\sqrt{6}$ et $2+2\sqrt{6}$
5) Ordonnée du sommet de la parabole représentant f tel que : $f(x) = -3x^2 + 7x - 2$	$-\frac{171}{12}$	$\frac{25}{12}$	$-\frac{25}{12}$	$\frac{171}{12}$

Bonus 2

Exercice 6 : (A faire directement sur votre copie)

Soit $f(x) = x + \frac{16}{x}$, pour tout $x > 0$

+1 — 1) Démontrer que , pour tout $x > 0$, $f(x) \geq 8$

+1 — 2) Déterminer le minimum de f sur $]0 ; +\infty[$ en justifiant.

1) Soit $x > 0$:

$f(x) - 8 = x + \frac{16}{x} - 8$

$= \frac{x^2+16-8x}{x} = \frac{(x-4)^2}{x}$

On a : $x > 0$ et $(x-4)^2 \geq 0$ (un carré est toujours positif dans ℝ).

d'où $f(x) - 8 \geq 0 \iff f(x) \geq 8$

2) Pour tout $x > 0$, $f(x) \geq 8$ (question 1) avec $f(4) = 4 + \frac{16}{4} = 4 + 4 = 8$

Donc : 8 est le minimum de f sur $]0 ; +\infty[$

Exercice 7 : /6

Pour chaque affirmation, cocher la case Vrai ou Faux ***en justifiant sous le tableau :***

Affirmations	**VRAI**	**FAUX**
1) L'équation $-3x^2+5x-1=0$ a deux solutions distinctes	X	
2) L'inéquation $4x^2-2x+9>0$ n'a pas de solution réelle.		X
3) Soit $m\in\mathbb{R}$, l'équation $x^2+2x-m^2=0$ a toujours deux solutions distinctes	X	
4) La forme factorisée de $-2x^2+5x-3$ est : $2(x-1)(x-\frac{3}{2})$		X

$4\times 9{,}5 = 2$

Justifications :

1) $-3x^2+5x-1=0$ $\begin{cases} a=-3 \\ b=5 \\ c=-1 \end{cases}$

$\Delta = b^2-4ac$

$= 25-4\times(-3)\times(-1)$

$= 13>0$ d'où l'équation admet 2 solutions distinctes.

1

2) $4x^2-2x+9>0$ $\begin{cases} a=4 \\ b=-2 \\ c=9 \end{cases}$

$\Delta = b^2-4ac$

$=(-2)^2-4\times4\times9$

$=4-144$

$=-140<0$ d'où le trinôme n'a pas de racine réelle. Il est toujours du signe de a.

Or, $a=4>0$

Donc : $4x^2-2x+9>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

c'est-à-dire $S=\mathbb{R}$

1

3) $x^2+2x-m^2=0$ $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=-m^2 \end{cases}$

$\Delta = b^2-4ac = 4+4m^2$

Or, $m^2\geq 0$ d'où $4+4m^2\geq 4>0$ pour tout $m\in\mathbb{R}$

Par conséquent, l'équation a toujours deux solutions distinctes

1

4) Soit $f(x)=-2x^2+5x-3$ $\begin{cases} a=-2 \\ b=5 \\ c=-3 \end{cases}$

$\Delta = b^2-4ac$

$=25-4\times(-2)\times(-3)$

$=1>0$ d'où f a deux racines distinctes.

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5+1}{-4} = 1$

et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5-1}{-4} = \dfrac{3}{2}$

D'où $f(x)=-2x^2+5x-3$ se factorise sous la forme $a(x-x_1)(x-x_2)$

Donc $f(x) = -2(x-1)(x-\frac{3}{2})$

1