

1^{ère} 6S

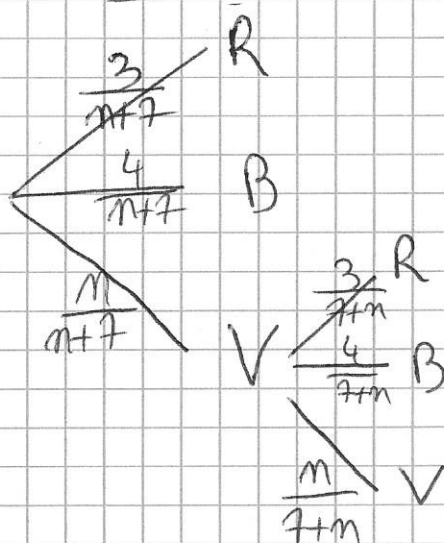
Corrigé du DM

(Rendu le 25/03/16)

Probabilités/Variations

(1)

1) Arbre pondéré: (pour modéliser la situation).



(1.5)

2) Valeurs possibles pour X_n :

- si le secteur est orange : +16
- si le secteur est blanc : -12
- si le secteur est vert, puis orange : +8
- si le secteur est vert, puis blanc : -2
- si le secteur est vert, puis vert : 0

La loi de probabilité de X_n :

R	-12	-2	0	8	16
$P(X_n = R)$	$\frac{4}{n+7}$	$\frac{4n}{(n+7)^2}$	$\frac{n^2}{(n+7)^2}$	$\frac{3n}{(n+7)^2}$	$\frac{3}{n+7}$

$$P(X_n = -12) = \frac{4}{n+7}$$

$$P(X_n = -2) = \frac{n}{n+7} \times \frac{4}{n+7} = \frac{4n}{(n+7)^2}$$

(principe multiplicatif)

$$P(X_n = 0) = \frac{n}{n+7} \times \frac{n}{n+7} = \frac{n^2}{(n+7)^2}$$

(2)

$$P(X_n = 8) = \frac{n}{n+7} \times \frac{3}{n+7} = \frac{3n}{(n+7)^2}$$

$$P(X_n = 16) = \frac{3}{n+7}$$

Remarque: $\sum P(X_n = \text{valeur}) = P(X_n = -12) + P(X_n = -2) + P(X_n = 0) + P(X_n = 8) + P(X_n = 16)$

$$= \frac{4}{n+7} + \frac{4n}{(n+7)^2} + \frac{n^2}{(n+7)^2} + \frac{3n}{(n+7)^2} + \frac{3}{n+7}$$

$$= \frac{4(n+7) + 4n + n^2 + 3n + 3(n+7)}{(n+7)^2}$$

$$= \frac{4n + 28 + 4n + 3n + 3n + n^2 + 21}{(n+7)^2} = \frac{14n + 49 + n^2}{(n+7)^2} = \frac{(n+7)^2}{(n+7)^2} = 1$$

3) $E(X_n) = -12 \times P(X_n = -12) - 2 \times P(X_n = -2) + 8 \times P(X_n = 8) + 16 \times P(X_n = 16)$ (2)

$$= -12 \times \frac{4}{n+7} - 2 \times \frac{4n}{(n+7)^2} + 8 \times \frac{3n}{(n+7)^2} + 16 \times \frac{3}{n+7}$$

$$= \frac{-48(n+7) - 8n + 24n + 48(n+7)}{(n+7)^2}$$

$E(X_n) = \frac{16n}{(n+7)^2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

4) Soit $f: [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{x}{(x+7)^2}$

f est dérivable sur $[0; +\infty[$ (-7 est valeur interdite
 mais $-7 \notin [0; +\infty[$).

on pose: $u(x) = x$ $v(x) = (x+7)^2$
 $= x^2 + 14x + 49$

$u'(x) = 1$ $v'(x) = 2x + 14$

On a: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ (3)

D'au $f'(x) = \frac{(x+7)^2 - x(2x+14)}{(x+7)^4}$
 $= \frac{x^2 + 14x + 49 - 2x^2 - 14x}{(x+7)^4}$

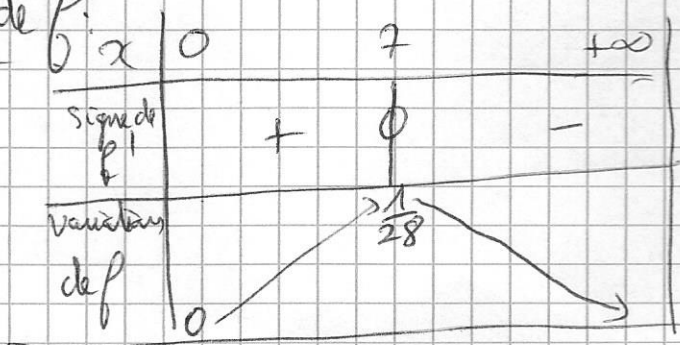
$= \frac{49 - x^2}{(x+7)^4} = \frac{(7-x)(7+x)}{(7+x)^4} = \frac{7-x}{(7+x)^3}$

- Sur $[0; +\infty[$, $7+x \geq 7 > 0$, d'au $(7+x)^3 > 0$ } $f'(x) \geq 0$ pour $0 \leq x \leq 7$
 et $7-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 7$. } et $f'(x) < 0$ pour $x > 7$.

D'au les variations de f .

$f(0) = 0$

$f(7) = \frac{7}{14^2} = \frac{7}{7^2 \times 2^2} = \frac{1}{28}$



5) D'après 3), $E(x_n) = \frac{16n}{(n+7)^2}$ avec $16 > 0$

3

D'après l'étude des variations de f (question 4),

f' s'annule et change de signe en $x = 7$

1,5

ici f admet un ~~max~~ extremum local en $x = 7$

D'après les variations de f , cet extremum local est un maximum local.

Par conséquent:

$E(x_n)$ est maximale pour $n = 7$