

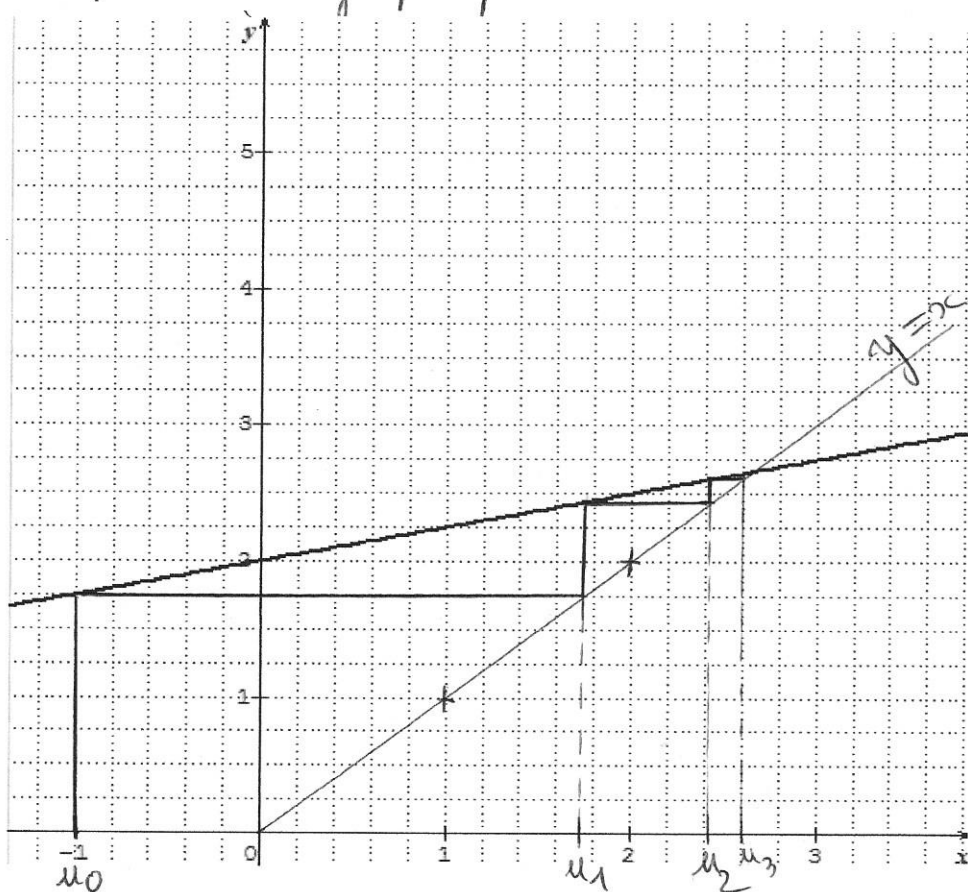
1^{ère} - 6SCorrection du contrôle
suites auxiliaires / Problème

(Fait le 11/12/15)

①

Exercice ①: 10

1) a) Voir représentation graphique :

Conjectures:

- La suite (u_n) semble croissante.
- Plus n augmente, plus u_n semble se rapprocher de l'abscisse (au l'ordonnée) du point d'intersection des 2 droites.

Plus précisément: ①

$$\frac{1}{4}x + 2 = x$$

$$\Leftrightarrow 2 = \frac{3}{4}x$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \times \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

$$2) u_0 = -1 \quad u_1 = \frac{1}{4}u_0 + 2 = \frac{1}{4} \times (-1) + 2 = -\frac{1}{4} + \frac{8}{4} = \frac{7}{4}$$

$$u_2 = \frac{1}{4}u_1 + 2 = \frac{1}{4} \times \frac{7}{4} + 2 = \frac{7}{16} + \frac{32}{16} = \frac{39}{16}$$

$$u_1 - u_0 = \frac{7}{4} + 1 = \frac{11}{4} \quad \text{et} \quad u_2 - u_1 = \frac{39}{16} - \frac{7}{4} = \frac{39}{16} - \frac{28}{16} = \frac{11}{16}$$

D'où $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc (u_n) n'est pas arithmétique

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{\frac{7}{4}}{-1} = -\frac{7}{4}$$

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{39}{16}}{\frac{7}{4}} = \frac{39}{16} \times \frac{4}{7} = \frac{39}{4 \times 7} = \frac{39}{28}$$

D'où $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ donc (u_n) n'est pas géométrique

$$3) a) v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{8}{3} = \frac{1}{4}u_n + 2 - \frac{8}{3} = \frac{1}{4}u_n - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}\left(u_n - \frac{8}{3}\right) = \frac{1}{4}v_n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$

②

Donc: (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de 1^{er} terme:

$$v_0 = u_0 - \frac{8}{3} = -1 - \frac{8}{3} = -\frac{11}{3}$$

b) Comme (v_n) géométrique:

$$\textcircled{1} \quad \underline{v_n = v_0 \times q^n = -\frac{11}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

c) Comme $u_n = v_n + \frac{8}{3}$, alors:

$$\textcircled{1} \quad \underline{u_n = -\frac{11}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{8}{3}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

4) $-1 < \frac{1}{4} < 1$, d'où $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ a pour limite 0, quand $n \rightarrow +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$$

$\textcircled{1}$ D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{8}{3}$ (En accord avec la conjecture faite en 1 b)).

Exercice (2): $\textcircled{18}$

$$1) y_{n+1} - y_n = \frac{1}{x_{n+1}-3} - \frac{1}{x_n-3}$$

$$= \frac{1}{\frac{9}{6-x_n}-3} - \frac{1}{x_n-3}$$

$$= \frac{1}{\frac{9-18+3x_n}{6-x_n}} - \frac{1}{x_n-3}$$

$$= \frac{6-x_n}{-9+3x_n} - \frac{1}{x_n-3}$$

$$= \frac{6-x_n}{3(x_n-3)} - \frac{3}{3(x_n-3)}$$

$$= \frac{3-x_n}{3(x_n-3)} = -\frac{1}{3}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Donc (y_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$ et de

$$\text{premier terme } y_0 = \frac{1}{x_0-3} = \frac{1}{1-3} = -\frac{1}{2}$$

2) Comme (y_n) arithmétique:

$$\textcircled{2} \quad \underline{y_n = y_0 + n r = -\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{3}\right) \times n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$$

3) $S = y_0 + y_1 + \dots + y_{19}$
 $= \text{nombre de termes} \times \frac{1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme}}{2}$ (car (y_n) suite arithmétique)
 $= 20 \times \frac{y_0 + y_{19}}{2}$ (2)

$y_0 = -\frac{1}{2}$ - Calculons y_{19} : $y_{19} = y_0 + 19 \times (-\frac{1}{3})$
 $= -\frac{1}{2} - \frac{19}{3} = -\frac{3}{6} - \frac{38}{6}$
 $= -\frac{41}{6}$

D'où $S = 20 \times \frac{-\frac{1}{2} - \frac{41}{6}}{2} = 10 \times (-\frac{3}{6} - \frac{41}{6})$
 $= 10 \times (-\frac{44}{6}) = 10 \times (-\frac{22}{3}) = \boxed{-\frac{220}{3}}$

4) $y_m = \frac{1}{x_m - 3} \Leftrightarrow x_m - 3 = \frac{1}{y_m} \Leftrightarrow x_m = \frac{1}{y_m} + 3$ (2)

D'où $x_m = \frac{1}{-\frac{1}{2} - \frac{m}{3}} + 3$, pour tout $m \in \mathbb{N}$

Exercice (3): (2) + Bonus 2

1) Ville (A): population en 2016 = $35000 \times 1,032 = 36120$ habitants
 0,5 Ville (B): population en 2016 = $31300 + 1800 = 33100$ habitants

2) (a_n) suite géométrique de raison 1,032 et de 1^{er} terme $a_0 = 35000$
 0,5 d'où $a_n = a_0 \times 1,032^n = 35000 \times 1,032^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

(b_n) suite arithmétique de raison 1800 et de 1^{er} terme $b_0 = 31300$
 0,5 d'où $b_n = b_0 + 1800 \times n = 31300 + 1800n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

3) $2020 = 2015 + 5$ (pour $n = 5$).

(+1) $a_5 = 35000 \times 1,032^5 \approx 40970$ habitants en 2020
 $b_5 = 31300 + 1800 \times 5 = 40300$ habitants en 2020

4) A la calculatrice, on observe que pour $n = 7$, $a_7 \approx 43634$
 $b_7 \approx 43900$

(+1) Donc à partir de l'année 2022, la ville (B) aura plus d'habitants que la ville (A).