

Exercice (1):
$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) a) $u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 2 = \frac{1}{3} \times 6 + 2 = \underline{4}$ $u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 2 = \frac{1}{3} \times 4 + 2 = \frac{4}{3} + \frac{6}{3} = \underline{\frac{10}{3}}$

b) $u_1 - u_0 = 4 - 6 = -2$ et $u_2 - u_1 = \frac{10}{3} - 4 = \frac{10}{3} - \frac{12}{3} = -\frac{2}{3}$
 $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc (u_n) n'est pas arithmétique

$\frac{u_1}{u_0} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{10}{3}}{4} = \frac{10}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2 \times 5}{3 \times 2} = \frac{5}{3}$

d'où $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ donc (u_n) n'est pas géométrique

2) $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 = \frac{1}{3}u_n - 1 = \frac{1}{3}(u_n - 3) = \frac{1}{3}v_n$

D'où (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme

3) Comme (v_n) est géométrique, $v_n = v_0 q^n = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \underline{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$ $v_0 = u_0 - 3 = 6 - 3 = 3$

Or, $v_n = u_n - 3$ d'où $u_n = v_n + 3$

Donc $u_n = 3 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ (car (v_n) géométrique)

$= 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}$

$= 3 \times \frac{3}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$

$S_n = \underline{\frac{9}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)}$

$\sum_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (v_0 + 3) + (v_1 + 3) + \dots + (v_n + 3)$

Donc $\underline{\sum_n = S_n + (n+1) \times 3 = \frac{9}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + (n+1) \times 3}$

Exercice ②:

2

$$u_0 = 100\ 000$$

1) u_1 : nombre d'habitants au 1^{er} janvier 2006:

$$u_1 = 100\ 000 \times 1,05 + 4\ 000 \\ = \underline{109\ 000}$$

u_2 : nombre d'habitants au 1^{er} janvier 2007:

$$u_2 = 109\ 000 \times 1,05 + 4\ 000 \\ = \underline{118\ 450}$$

2) u_n : nombre d'habitants au 1^{er} janvier 2005 + n

u_{n+1} : nombre d'habitants au 1^{er} janvier 2005 + n + 1

D'après l'énoncé, chaque année la population augmente de 5% et 4000 personnes arrivent en plus.

Par une hausse de 5%, le coefficient multiplicateur est $1 + \frac{5}{100} = 1,05$

Par conséquent: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,05 u_n + 4\ 000$

$$3) v_n = u_n + 80\ 000$$

$$v_0 = u_0 + 80\ 000 = 100\ 000 + 80\ 000 = \underline{180\ 000}$$

a)

$$b) v_{n+1} = u_{n+1} + 80\ 000 = 1,05 u_n + 4\ 000 + 80\ 000$$

$$= 1,05 u_n + 84\ 000$$

$$= 1,05 \left(u_n + \frac{84\ 000}{1,05} \right) = 1,05 (u_n + 80\ 000)$$

$$= 1,05 v_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Donc: (v_n) est géométrique de raison 1,05 et de premier terme $v_0 = 180\ 000$

c) Comme (v_n) est géométrique, $v_n = v_0 \times 1,05^n = \underline{180\ 000 \times 1,05^n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$d) \text{ Or, } v_n = u_n + 80\ 000 \Leftrightarrow u_n = v_n - 80\ 000$$

$$\text{Donc: } u_n = 180\ 000 \times 1,05^n - 80\ 000, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$4) u_{n+1} - u_n = 180\ 000 \times 1,05^{n+1} - 80\ 000 - 180\ 000 \times 1,05^n + 80\ 000$$

$$= 180\ 000 \times 1,05^n (1,05 - 1) = 180\ 000 \times 1,05^n \times 0,05$$

$$= 9\ 000 \times 1,05^n > 0, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Donc (u_n) est strictement croissante

Exercice (3):

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$: u_n = montant total versé à Marc le $n^{\text{ème}}$ jour
 $u_1 = 100$

a) $u_2 = 1,05 \times u_1 + 20 = 1,05 \times 100 + 20 = 125$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, d'après l'énoncé, u_{n+1} = montant total versé à Marc le $(n+1)^{\text{ème}}$ jour
 $= 1,05 u_n + 20$ (Hausse de 5% du montant précédent + 20 €)

2) $v_n = u_n + 400$

a) $v_1 = u_1 + 400 = 500$

b) $v_{n+1} = u_{n+1} + 400 = 1,05 u_n + 20 + 400 = 1,05 u_n + 420$
 $= 1,05(u_n + \frac{420}{1,05})$
 $= 1,05(u_n + 400)$
 $= 1,05 v_n$

Donc (v_n) est géométrique de raison 1,05 et de premier terme $v_1 = 500$

c) Comme (v_n) est géométrique, $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 500 \times 1,05^{n-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

e) $v_n = u_n + 400 \Leftrightarrow u_n = v_n - 400$

Donc : $u_n = 500 \times 1,05^{n-1} - 400$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

d) $v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_1 \times \frac{1-q}{1-q}$ (car (v_n) : suite géométrique)
 $= 500 \times \frac{1-1,05^n}{1-1,05} = \frac{500}{-0,05} \times (1-1,05^n)$
 $= -10\,000(1-1,05^n)$

3) Soit $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = (v_1 - 400) + (v_2 - 400) + \dots + (v_n - 400)$
 $= v_1 + v_2 + \dots + v_n - 400n$
 $= -10\,000(1-1,05^n) - 400n$

A la calculatrice, on observe que pour $n \geq 22$, $S_n > 10\,000$
Il aura gagné 10 000 €, au bout de 22 jours.

Exercice (4):

1) $u_1 = \frac{2u_0}{2+3u_0} = \frac{2 \times 1}{2+3 \times 1} = \boxed{\frac{2}{5}}$ $u_2 = \frac{2u_1}{2+3u_1} = \frac{2 \times \frac{2}{5}}{2+3 \times \frac{2}{5}} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{16}{5}} = \frac{4}{5} \times \frac{5}{16} = \boxed{\frac{1}{4}}$

2) A la calculatrice, $u_{20} \approx 0,0322$

3) $u_1 - u_0 = \frac{2}{5} - 1 = -\frac{3}{5}$ $u_2 - u_1 = \frac{1}{4} - \frac{2}{5} = \frac{5-8}{20} = -\frac{3}{20}$

$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc (u_n) n'est pas arithmétique

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{\frac{2}{5}}{1} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{8}$$

$\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ donc (u_n) n'est pas géométrique

4) $u_n \neq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1 + \frac{2}{u_n}$

a) $v_0 = 1 + \frac{2}{u_0} = 1 + \frac{2}{1} = \boxed{3}$ $v_1 = 1 + \frac{2}{u_1} = 1 + \frac{2}{\frac{2}{5}} = 1 + 2 \times \frac{5}{2} = \boxed{6}$

b) $v_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_{n+1}} = 1 + \frac{2}{\frac{2u_n}{2+3u_n}} = 1 + 2 \times \frac{2+3u_n}{2u_n} = 1 + \frac{2}{u_n} + \frac{3u_n}{u_n} = 1 + \frac{2}{u_n} + 3 = v_n + 3$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Donc (v_n) est arithmétique de raison 3 et de premier terme $v_0 = 3$

d) Comme (v_n) est arithmétique, $v_n = v_0 + n \times r$
 $= 3 + 3n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

e) Or, $v_n = 1 + \frac{2}{u_n} \Leftrightarrow v_n - 1 = \frac{2}{u_n} \Leftrightarrow u_n = \frac{2}{v_n - 1}$

Donc $u_n = \frac{2}{3+3n-1} = \frac{2}{2+3n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.