NOM :... Prénom : CORRIGÉ ....

Première 6 S	**<u>Contrôle de mathématiques</u>** *Dérivation*	Fcol 6 18/02/15

– Calculatrices autorisées
– Durée : 45 min

Total/20

<u>Observations :</u>
<u>NOTE :</u>

<u>Exercice 1 :</u> /6

On considère trois fonctions f, g et h dont les expressions en fonction de x respectives sont données dans le tableau qui suit.

Calculer pour chaque fonction ,**<u>en détaillant les étapes</u>**, le nombre dérivé en 3 :

$f(x) = 2x^2 - 3x + 1$	$g(x) = \dfrac{1}{x}$	$H(x) = \sqrt{x}$
soit $h \neq 0$: $f(3+h) = 2(3+h)^2 - 3(3+h) + 1$ $= 2(3^2 + 6h + h^2) - 9 - 3h + 1$ $= 18 + 12h + 2h^2 - 8 - 3h$ $= 10 + 9h + 2h^2$ $\dfrac{f(3+h) - f(3)}{h} = \dfrac{\cancel{10} + 9h + 2h^2 \cancel{- 10}}{h}$ $= \dfrac{h(9+2h)}{h} = 9 + 2h$ $\lim\limits_{h \to 0} (9 + 2h) = \boxed{9 = f'(3)}$ (2)	$h \neq 0$ et $h \neq -3$ $g(3+h) = \dfrac{1}{3+h}$ $\dfrac{g(3+h) - g(3)}{h} = \dfrac{\frac{1}{3+h} - \frac{1}{3}}{h}$ $= \dfrac{\frac{3-(3+h)}{3(3+h)}}{h} = \dfrac{\frac{-h}{3(3+h)}}{h}$ $= -\dfrac{h}{3(3+h)} \times \dfrac{1}{h}$ $= -\dfrac{1}{3(3+h)}$ Or, $\lim\limits_{h \to 0} -\dfrac{1}{3(3+h)} = \boxed{-\dfrac{1}{9} = g'(3)}$ (2)	$h \neq 0$ et $3 + h \geqslant 0 \Leftrightarrow h \geqslant -3$ donc $h \in [-3 ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ $H(3+h) = \sqrt{3+h}$. $\dfrac{H(3+h) - H(3)}{h} = \dfrac{\sqrt{3+h} - \sqrt{3}}{h}$ $= \dfrac{(\sqrt{3+h} - \sqrt{3})(\sqrt{3+h} + \sqrt{3})}{h(\sqrt{3+h} + \sqrt{3})}$ $= \dfrac{3 + h - 3}{h(\sqrt{3+h} + \sqrt{3})} = \dfrac{1}{\sqrt{3+h} + \sqrt{3}} \xrightarrow[h \to 0]{} \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ Donc $H'(3) = \boxed{\dfrac{1}{2\sqrt{3}}}$ (2)

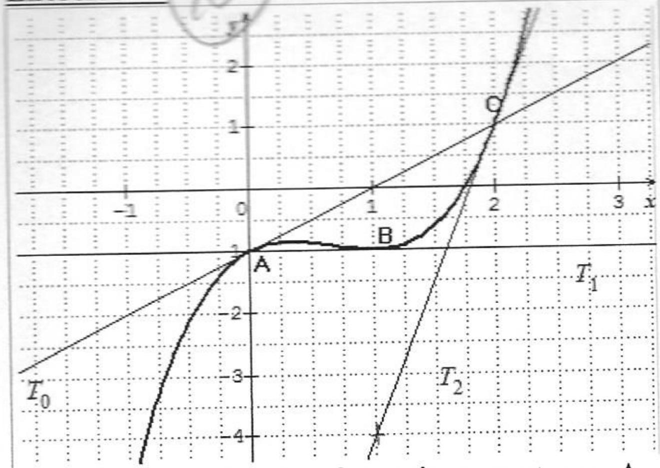
<u>Exercice 2 :</u> /3

Soit f définie par $f(x) = -3x^2 + 2x - 4$. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $\dfrac{2}{3}$ en détaillant bien les étapes :

$h \neq 0$, $f\left(\frac{2}{3} + h\right) = -3\left(h + \frac{2}{3}\right)^2 + 2\left(h + \frac{2}{3}\right) - 4$ $= -3\left(h^2 + \frac{4}{9} + \frac{4}{3}h\right) + 2h + \frac{4}{3} - 4$ $= -3h^2 - 4h - \cancel{\frac{4}{3}} + 2h + \cancel{\frac{4}{3}} - 4$ $= -3h^2 - 2h - 4$ $\dfrac{f\left(\frac{2}{3} + h\right) - f\left(\frac{2}{3}\right)}{h} = \dfrac{-3h^2 - 2h - 4 - \left(-3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2 \times \frac{2}{3} - 4\right)}{h}$ $= \dfrac{-3h^2 - 2h + \cancel{\frac{4}{3}} - \cancel{\frac{4}{3}}}{h}$ $= \dfrac{h(-3h - 2)}{h} = -3h - 2 \xrightarrow[h \to 0]{} -2 = f'\left(\frac{2}{3}\right)$	Or, $T_{\frac{2}{3}} : y = f'\left(\frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right)$ $y = -2\left(x - \frac{2}{3}\right) + (-3) \times \frac{4}{9} + \frac{4}{3} - 4$ $= -2x + \cancel{\frac{4}{3}} - \cancel{\frac{4}{3}} + \frac{4}{3} - \frac{12}{3}$ $(T_{\frac{2}{3}}) : y = -2x - \dfrac{8}{3}$

TOURNER SVP

Exercice 3 : 6



Courbe d'une fonction f et trois tangentes en A, B et C

On considère une fonction f représentée dans un repère orthogonal du plan.

On a placé trois points sur la courbe de f : A, d'abscisse 0, B , d'abscisse 1 et C, d'abscisse 2.

On appelle (T_0), (T_1) et (T_2) les tangentes à la courbe de f respectivement en A, B et C

1) Déterminer graphiquement f '(0) , f '(1) et f '(2) en justifiant la démarche :

$f'(0)$: coefficient directeur de (T_0)

$f'(0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{1} = \boxed{1}$ 1,5

$f'(1)$: coefficient directeur de (T_1)

$f'(1) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \boxed{0}$ 1,5

$f'(2)$: coefficient directeur de (T_2)

$f'(2) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-(-4)}{2-1} = \frac{5}{1} = \boxed{5}$ 1,5

2) Déterminer l'équation réduite de (T_2)

$(T_2) : y = f'(2)(x-2) + f(2)$

$= 5(x-2) + f(2)$

$= 5(x-2) + 1$ (car $C(2;1)$)

Donc :

$(T_2) : y = 5x - 10 + 1$

$= 5x - 9$ 1,5

Exercice 4 : 5

Soit la fonction f définie par f(x) = $\sqrt{x^2+4}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de f

1 f est définie si et seulement si $x^2+4 \geq 0 \iff x^2 \geq -4$ (toujours vrai)

Donc $D_f = \mathbb{R}$

b) Soit a ∈ ℝ, h ≠ 0. Montrer que f(a+h) – f(a) = $\frac{h^2+2ah}{\sqrt{4+(a+h)^2}+\sqrt{4+a^2}}$

2

$f(a+h) - f(a) = \sqrt{(a+h)^2+4} - \sqrt{a^2+4}$

$= \frac{\left(\sqrt{(a+h)^2+4} - \sqrt{a^2+4}\right)\left(\sqrt{(a+h)^2+4} + \sqrt{a^2+4}\right)}{\left(\sqrt{(a+h)^2+4} + \sqrt{a^2+4}\right)}$

$= \frac{(a+h)^2 + \cancel{4} - a^2 - \cancel{4}}{\sqrt{(a+h)^2+4} + \sqrt{a^2+4}} = \frac{\cancel{a^2} + 2ah + h^2 - \cancel{a^2}}{\sqrt{(a+h)^2+4} + \sqrt{a^2+4}}$

$= \frac{h^2+2ah}{\sqrt{4+(a+h)^2} + \sqrt{4+a^2}}$

c) En déduire que f est dérivable en tout a ∈ ℝ et calculer f '(a)

On a $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{h^2+2ah}{h\left(\sqrt{4+(a+h)^2} + \sqrt{4+a^2}\right)} = \frac{h(h+2a)}{h\left(\sqrt{4+(a+h)^2} + \sqrt{4+a^2}\right)}$ a une limite finie quand $h \to 0$ donc f est dérivable sur ℝ et

2

$f'(a) = \frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}\sqrt{4+a^2}} = \boxed{\frac{a}{\sqrt{4+a^2}}}$