

10es

Corrigé du devoir commun

n° 1

(Part 6 12/11/16)

(1)

Exercice 1): $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$

a) Si $c = 0$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx = 0$

$$\Leftrightarrow x(ax + b) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } ax + b = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\frac{b}{a}$$

$$S = \left\{ 0; -\frac{b}{a} \right\}$$

Donc la proposition a) est vraie

b) 1 solution de $f(x) = 0 \Leftrightarrow f(1) = 0$

$$\Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Leftrightarrow a + b + c = 0$$

Donc la proposition b) est vraie

c) $f(x) \geq 0$ Exemple: $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

du signe de $a = 3 > 0$ $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 12 = -8 < 0$ le trinôme est toujours

~~commence par~~

Donc $f(x) > 0$

Donc la proposition c) est fausse

d) Si $\Delta > 0$ et $a > 0$: f admet deux racines distinctes x_1 et x_2 avec $x_1 < x_2$.
 f est du signe de $-a$ entre les racines.

Donc: $f(x) < 0$ pour $x \in]x_1; x_2[$

La proposition d) est donc vraie

e) On suppose a et c de même signe:

Exemple: $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$, $a = 3$ a et c ont le même signe.

et $\Delta = b^2 - 4ac = -8 < 0$, d'où $f(x) = 0$ n'admet pas de

solution réelle.

Donc la proposition e) est fausse.

f) si $a > 0$, f est d'abord décroissante, puis croissante
 f admet un minimum ($= \beta$) pour $x = x = -\frac{b}{2a}$ (2)

g) f atteint son minimum proposition f) vraie
 pour $x = -\frac{b}{2a}$ D'où la proposition g) est fausse

h) Exple: si $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$
 $a = 3 > 0$, donc f admet un minimum et $\Delta = b^2 - 4ac$
 $= 4 - 4 \times 3 \times (-1)$
 $= 16 > 0$

Donc la proposition h) est fausse

i) $f(x) = ax^2 + bx + c$ $\Delta = b^2 - 4ac$
 Si $a + b + c = 0$, 1 est une racine de f
Donc $\Delta \geq 0$ proposition i) est vraie

j) Si $a < 0$ et $\Delta < 0$: f est toujours du signe de a
 alors l'inéquation $f(x) \leq 0$ admet des solutions.
Donc la proposition j) est vraie.

Exercice (2):

$$\begin{aligned} 1) h(x) &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 3 \\ &= \frac{1}{2}(x^2 - 7x + 6) \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + \frac{24}{4}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right] \end{aligned}$$

Donc $h(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{25}{8}$ (Forme canonique de h)

2) $f(x) = -x^2 + 7x - 6$ $a = -1 < 0$ | D'autre part, $f(1) = f(6)$
 La parabole représentée f est orientée vers le bas

$$g(x) = x^2 + 2x - 9, \quad a = 1 > 0$$

La parabole représentant g est orientée vers le haut.

l'autre point : $g(0) = -9$

3) x antécédent de 0 par $f \Leftrightarrow f(x) = 0$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 7x - 6 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 49 - 4 \times (-1) \times (-6) = 25 > 0 \text{ d'où l'équation admet 2 solutions}$$

distinctes :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 + 5}{-2} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 - 5}{-2} = 6$$

1 et 6 sont les antécédents de 0 par f .

4) x abscisse d'un point d'intersection entre les deux paraboles

$$\Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 7x - 6 = x^2 + 2x - 9$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 + 5x + 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 25 + 24 = 49 > 0, \text{ l'équation admet donc 2 solutions distinctes.}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + 7}{-4} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - 7}{-4} = 3$$

$$\begin{aligned} \text{Calculons } f(x_1) &= f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 7 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 6 \\ &= -\frac{1}{4} - \frac{7}{2} - 6 \\ &= -\frac{1}{4} - \frac{14}{4} - \frac{24}{4} = -\frac{39}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Calculons } f(x_2) : f(3) &= -3^2 + 7 \times 3 - 6 \\ &= -9 + 21 - 6 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Donc $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{39}{4}\right)$ et $(3; 6)$ sont les coordonnées des points d'intersection des deux paraboles

5) a) Par lecture graphique :

- Pour $x \in [-5; -\frac{1}{2}] \cup [3; 6]$, $f(x) \leq g(x)$

- Pour $x \in [-\frac{1}{2}; 3]$, $f(x) \geq g(x)$

b) Par le calcul:

$$f(x) - g(x) = -x^2 + 7x - 6 - (x^2 + 2x - 9)$$

$$= -2x^2 + 5x + 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4 \times (-2) \times 3$$

$$= 25 + 24 = 49 > 0$$

D'ail le trinôme admet deux racines distinctes.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + 7}{-4} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - 7}{-4} = \frac{-12}{-4} = 3$$

Le trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines. Or $a = -2 < 0$

$$f(x) - g(x) \geq 0 \text{ pour } x \in [-\frac{1}{2}; 3]$$

$$\text{et } f(x) - g(x) \leq 0 \text{ pour } x \in [-5; -\frac{1}{2}] \cup [3; 6]$$

c'est-à-dire: - La parabole représentant f est au-dessus de celle représentant g sur $[-\frac{1}{2}; 3]$

- La parabole représentant f est en-dessous de celle représentant g sur $[-5; -\frac{1}{2}] \cup [3; 6]$

Exercice (3):

$$1) f(x) = \frac{-2x^2 + 3x - 1}{3x^2 + 4x - 4}$$

a) f est définie si et seulement si $3x^2 + 4x - 4 \neq 0$

$$3x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 16 + 48 = 64 > 0 \text{ d'ail l'équation admet deux solutions distinctes}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + 8}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - 8}{6} = \frac{-12}{6} = -2$$

$$\text{Donc } D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{3}; -2 \right\}$$

$$\text{Pour } x \in D_f, f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 9 - 4 \times (-2) \times (-1)$$

$= 9 - 8 = 1 > 0$ d'où l'équation admet deux solutions distinctes

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + 1}{-4} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - 1}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$$

Donc: $S = \left\{ \frac{1}{2}; 1 \right\}$

c) Étude des signes de $f(x)$

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$$

* N est du signe de a à l'extérieur de ses racines. Or $a = -2 < 0$.

D'où $N(x) \leq 0$ pour $x \in]-\infty; \frac{1}{2}] \cup [1; +\infty[$

* D est du signe de a à l'extérieur de ses racines. Or $a = 3 > 0$

D'où $D(x) > 0$ pour $x \in]-\infty; -2[\cup]\frac{2}{3}; +\infty[$

On en déduit le tableau de signes suivant:

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	$+\infty$
signe de $-2x^2 + 3x - 1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	0
signe de $3x^2 + 4x - 4$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
Signe de $f(x)$	$-$	$ $	$+$	0	$-$	$ $

$$f(x) \leq 0 \text{ pour } x \in]-\infty; -2[\cup \left[\frac{1}{2}; \frac{2}{3} \right[\cup [1; +\infty[$$

$$S =]-\infty; -2[\cup \left[\frac{1}{2}; \frac{2}{3} \right[\cup [1; +\infty[$$

2) a) $\sqrt{1-x} = 2x+1$

* $\sqrt{1-x}$ existe ssi et seulement si $1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$

* $\sqrt{1-x} \geq 0$ d'où $2x+1 \geq 0$ c'est-à-dire $x \geq -\frac{1}{2}$

Donc l'équation est définie sur $\left[-\frac{1}{2}; 1 \right]$

$$\text{sur } \left[-\frac{1}{2}; 1\right] :$$

$$1-x = (2x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow 1-x = 4x^2 + 4x + 1$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 5x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(4x+5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } 4x+5=0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x = -\frac{5}{4}$$

$$\text{Donc } S = \{0\}$$

Exercice (4):

$$\text{or } -\frac{3}{4} \notin \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$$

$$u(x) = 2x^2 - 2x - 4$$

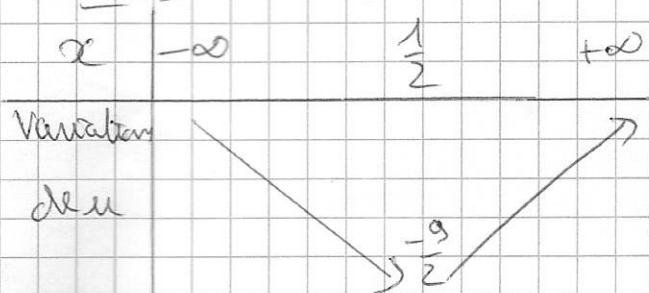
1) $a=2 > 0$, d'où u est d'abord décroissante, puis croissante.

Calcul de α et β :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \beta &= u(\alpha) = u\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{2} - 4 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{2}{2} - \frac{8}{2} \\ &= -\frac{9}{2} \end{aligned}$$

D'où le tableau de variations de u :



2) Vrai car

$$3) f = \sqrt{u}$$

a) f est définie si et seulement si $2x^2 - 2x - 4 \geq 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \times 2 \times (-4)$$

$$= 36 > 0 \text{ d'où le trinôme } u \text{ admet deux racines}$$

$$\text{distinctes } x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+6}{4} = 2 \text{ et } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-6}{4} = -1$$

u est du signe de a à l'extérieur de ses racines - Or, $a=2 > 0$

C'est-à-dire:

(7)

$$u(x) > 0 \text{ pour } x \in]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$$

$$\text{Donc } D_f =]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$$

b) Sur D_f :

* Sur $] -\infty; -1]$: u est décroissante

comme $f = \sqrt{u}$, f et u ont les mêmes variations sur $] -\infty; -1]$

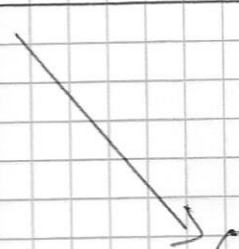
Donc: f est décroissante sur $] -\infty; -1]$

* Sur $[2; +\infty[$: u est croissante

comme $f = \sqrt{u}$, f et u ont les mêmes variations sur $[2; +\infty[$

Donc: f est croissante sur $[2; +\infty[$:

Tableau de variations:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
Variation de f				

4) a) R est définie si et seulement si $u(x) \neq 0$

$$\text{Or, } u(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } 2$$

$$\text{Donc: } D_R = \mathbb{R} - \{-1; 2\}$$

b) Sur $] -\infty; -1[$

Soient a et b dans $] -\infty; -1[$ tels que $a < b$.

$$\begin{aligned} R(a) - R(b) &= \frac{-2}{u(a)} - \frac{-2}{u(b)} \\ &= -2 \times \left(\frac{u(b) - u(a)}{u(a) \times u(b)} \right) \end{aligned}$$

Sur cet intervalle: $u(a) > 0$ et $u(b) > 0$ d'où $u(a) \times u(b) > 0$

D'autre part: u est décroissante sur $] -\infty; -1[$

$$\text{D'où } u(a) - u(b) > 0 \text{ d'où } u(b) - u(a) < 0$$

Donc: $R(a) - R(b) > 0$ c'est-à-dire $R(a) > R(b)$

Par conséquent: R est décroissante sur $]-\infty; -1[$

- Sur $]-1; \frac{1}{2}]$: Soient $a, b \in]-1; \frac{1}{2}]$ avec $a < b$.

$$R(a) - R(b) = -2 \left(\frac{u(b) - u(a)}{u(a) \times u(b)} \right) \quad \left. \begin{array}{l} u(a) < 0 \\ u(b) < 0 \end{array} \right\} u(a) \times u(b) > 0$$

Comme u est décroissante sur $]-1; \frac{1}{2}]$,

Donc: $R(a) - R(b) > 0$ c'est-à-dire $R(a) > R(b)$

R est donc décroissante sur $]-1; \frac{1}{2}]$.

- Sur $[\frac{1}{2}; 2[$: Soient $a, b \in [\frac{1}{2}; 2[$ avec $a < b$

$$R(a) - R(b) = -2 \left(\frac{u(b) - u(a)}{u(a) \times u(b)} \right) \quad \left. \begin{array}{l} u(a) \geq 0 \\ u(b) \geq 0 \end{array} \right\} u(a) \times u(b) > 0$$

Comme u est croissante sur $[\frac{1}{2}; 2[$, $u(a) < u(b)$

Donc $R(a) - R(b) < 0$ c'est-à-dire $R(a) < R(b)$

R est donc croissante sur $[\frac{1}{2}; 2[$

- Sur $]2; +\infty[$: Soient $a, b \in]2; +\infty[$ avec $a < b$

$$R(a) - R(b) = -2 \left(\frac{u(b) - u(a)}{u(a) \times u(b)} \right) \quad \left. \begin{array}{l} u(a) > 0 \\ u(b) > 0 \end{array} \right\} u(a) \times u(b) > 0$$

Comme u est croissante sur $]2; +\infty[$, $u(a) < u(b)$

$$\Leftrightarrow u(b) - u(a) > 0$$

N'ai $R(a) - R(b) < 0$ c'est-à-dire $R(a) < R(b)$

R est donc croissante sur $]2; +\infty[$

Exercice (5):

$$1) g(x) = -x^2 - 2x + 3 \quad \left\{ \begin{array}{l} a = -1 < 0 \\ b = -2 \\ c = 3 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{d'où } g \text{ est croissante puis} \\ \text{décroissante.} \end{array}$$

$$\text{calcul de } \alpha \text{ et } \beta: \quad \alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{-2} = -1 \quad \beta = g(-1) = -(-1)^2 - 2 \times (-1) + 3 = -1 + 2 + 3 = 4$$

Tableau de variations :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
Variation de g		$\nearrow 4$	$\searrow$

$$2) \Delta = b^2 - 4ac = 4 + 12 = 16 > 0$$

Le trinôme admet 2 racines distinctes

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + 4}{-2} = -3 \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - 4}{-2} = 1$$

Le trinôme est du signe de a à l'extérieur de ses racines. Or $a = -1 < 0$

D'où : $g(x) \leq 0$ pour $x \in]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[$

et $g(x) > 0$ pour $x \in]-3; 1[$

$$3) f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 3, & \text{pour } x \in [-3; 1] \\ x^2 + 2x - 3, & \text{pour } x \in]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[\end{cases}$$

4) Voir les courbes.