

Suites

①

Exercice ①:
$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n - 1 \\ u_0 = -2 \end{cases}$$

1) a) $u_1 = \frac{4}{5}u_0 - 1 = \frac{4}{5} \times (-2) - 1 = -\frac{8}{5} - \frac{5}{5} = -\frac{13}{5}$

$u_2 = \frac{4}{5}u_1 - 1 = \frac{4}{5} \times \left(-\frac{13}{5}\right) - 1 = -\frac{52}{25} - \frac{25}{25} = -\frac{77}{25}$

b) $u_1 - u_0 = -\frac{13}{5} - (-2) = -\frac{13}{5} + 2 = -\frac{13}{5} + \frac{10}{5} = -\frac{3}{5}$ $\left. \begin{array}{l} u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1 \\ \text{Donc} \\ (u_n) \text{ n'est pas arithmétique} \end{array} \right\}$

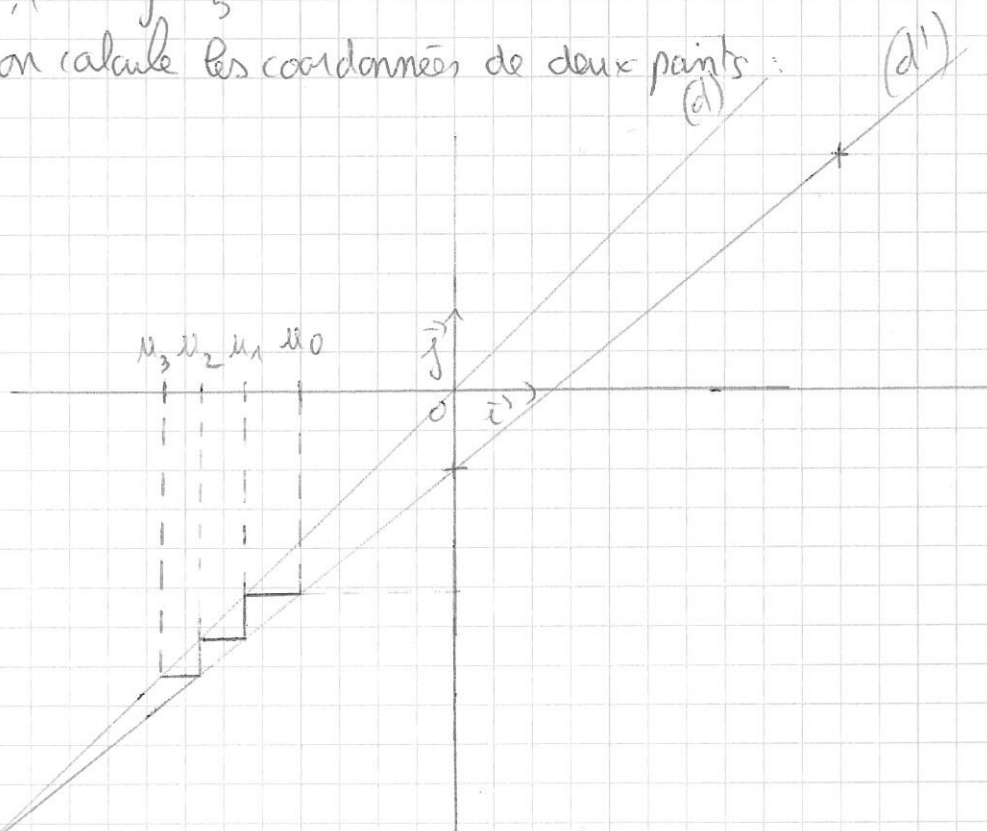
$u_2 - u_1 = -\frac{77}{25} - \left(-\frac{13}{5}\right) = -\frac{77}{25} + \frac{65}{25} = -\frac{12}{25}$

$\frac{u_1}{u_0} = \frac{-\frac{13}{5}}{-2} = \frac{13}{10} \times \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{20}$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{-\frac{77}{25}}{-\frac{13}{5}} = \frac{77}{25} \times \left(\frac{5}{13}\right) = \frac{77}{65} = \frac{7}{5}$ $\left. \begin{array}{l} \frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1} \text{ donc} \\ (u_n) \text{ n'est pas géométrique} \end{array} \right\}$

2) a) (d): $y = x$, (d'): $y = \frac{4}{5}x - 1$

b) Pour tracer (d'), on calcule les coordonnées de deux points:

x	0	5
y	-1	3



c) En utilisant la calculatrice (tableau de termes) et la représentation graphique précédente, il semblerait que u_n tend vers -5 quand n tend vers $+\infty$.

(Conjecture: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -5$)

Remarque: L'abscisse du point d'intersection des deux droites est -5 .

$\frac{4}{5}x - 1 = x \Leftrightarrow -\frac{1}{5}x = 1 \Leftrightarrow x = -5$

3) $v_n = u_n + 5$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$a) v_{n+1} = u_{n+1} + 5 = \frac{4}{5}u_n - 1 + 5 = \frac{4}{5}u_n + 4 = \frac{4}{5}(u_n + 5) = \frac{4}{5}v_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \quad (2)$$

D'ici (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{5}$ et de premier terme v_0
avec $v_0 = u_0 + 5 = -2 + 5 = 3$

b) Comme (v_n) est géométrique,
$$v_n = v_0 \times q^n = 3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

c) $v_n = u_n + 5 \Leftrightarrow u_n = v_n - 5 = 3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n - 5, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$

4) a) $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

$$= v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \text{ car } (v_n) \text{ est géométrique}$$

$$= 3 \times \frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{4}{5}} = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}}{\frac{1}{5}} = \frac{15 \times (1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1})}{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}}$$

b) $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$$= (v_0 - 5) + (v_1 - 5) + \dots + (v_n - 5)$$

$$= v_0 + v_1 + \dots + v_n + (-5) \times (n+1)$$

$$= S_n - 5(n+1)$$

$$T_n = 15 \times (1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}) - 5(n+1), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

c) $-1 < \frac{4}{5} < 1$ d'ici $\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, alors $1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$

Donc: $15(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 15$

Et: $n+1 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$, d'ici $-5(n+1) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$

Par conséquent: $T_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$

Exercice (2): $S = 3 + \frac{3}{5} + \frac{3}{25} + \dots + \frac{3}{15625}$

On pose: $u_0 = 3$, $u_1 = \frac{3}{5}$, $u_2 = \frac{3}{25}$, ..., $u_n = \frac{3}{15625}$

(u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $u_0 = 3$

Déterminons l'indice n du dernier terme:

$$u_n = u_0 \times q^n = 3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{3}{15625}$$

Donc $\left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1}{15\,625} \Rightarrow 5^n = 15\,625$

Avec la calculatrice $n = 6$
(car $5^6 = 15\,625$)

Donc la somme comporte sept termes (de u_0 à u_6)

$$S = u_0 \times \frac{1-q^7}{1-q} = 3 \times \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^7}{1-\frac{1}{5}} = 3 \times \frac{5}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^7\right)$$
$$= \frac{15}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^7\right)$$
$$\approx \underline{\underline{3,75}}$$

Exercice 3)

1) $p_{n+1} = p_n + 12$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

2) Donc (p_n) est une suite arithmétique, de raison 12 et de premier terme $p_0 = 500$. Donc $p_n = p_0 + nr = \underline{\underline{500 + 12n}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

3) $2023 = 2013 + 10$ on calcule p_{10}

$$p_{10} = 500 + 12 \times 10$$
$$= 500 + 120 = 620 \quad \text{En 2023, la prime sera de } \underline{\underline{620 \text{ €}}}$$

4) de 2013 à 2023 : $p_0 + p_1 + \dots + p_{10} = 11 \times \frac{p_0 + p_{10}}{2}$

$$= 11 \times \frac{500 + 620}{2}$$
$$= \underline{\underline{6160}}$$

De 2013 à 2023, chaque employé va recevoir en tant $\underline{\underline{6160 \text{ €}}}$.

5) Revalorisation de 2% par an.

On a : $p_{n+1} = \left(1 + \frac{2}{100}\right) \times p_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$= 1,02 \times p_n$$

Donc (p_n) est géométrique de raison 1,02 et de premier terme $p_0 = 500$

Alors : $p_n = p_0 \times q^n = \underline{\underline{500 \times 1,02^n}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

En 2023, $p_{10} = 500 \times 1,02^{10} \approx 609,5$

En 2023, la prime sera de $\underline{\underline{609,5 \text{ €}}}$.

De 2013 à 2023 : $p_0 + p_1 + \dots + p_{10} = p_0 \times \frac{1-q^{11}}{1-q} = 500 \times \frac{1-1,02^{11}}{1-1,02} \approx 6084$

Chaque employé va recevoir en tant $\underline{\underline{6084 \text{ €}}}$