

(1)

Exercice 1: (E): $(m-2)x^2 - (m+1)(m-2)x + m+1 = 0$ 1) (E): Equation du second degré $\Leftrightarrow m-2 \neq 0$

$$\Leftrightarrow \underline{m \neq 2}$$

2) $m \neq 2$:a) 0 solution de (E) $\Leftrightarrow (m-2)x=0 - (m+1)(m-2)x + m+1 = 0$

$$\Leftrightarrow m+1=0$$

$$\Leftrightarrow \underline{m = -1}$$

b) 1 solution de (E) $\Leftrightarrow (m-2) - (m+1)(m-2) + m+1 = 0$

$$\Leftrightarrow m-2 - m^2 + m + 2 + m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -m^2 + 3m + 1 = 0$$

 $\Delta = b^2 - 4ac = 9 + 4 = 13 > 0$ - L'équation admet 2 solutions

distinctes

$$m_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{13}}{-2} = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$$

$$\text{et } m_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{13}}{-2} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$

Donc: 1 solution de (E) $\Leftrightarrow m = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$ ou $m = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$ c) (E) admet deux solutions distinctes $\Leftrightarrow \Delta > 0$

$$\Leftrightarrow ((m+1)(m-2))^2 - 4(m-2)(m+1) > 0$$

$$\Leftrightarrow (m+1)(m-2)((m+1)(m-2) - 4) > 0$$

$$\Leftrightarrow (m+1)(m-2)(m^2 - m - 6) > 0.$$

Etude du signe du produit:

$$m^2 - m - 6$$

 $\Delta = 1 + 24 = 25 > 0$ 2 racines distinctes

$$m_1 = \frac{1+5}{2} = 3 \text{ et } m_2 = \frac{1-5}{2} = -2$$

Le signe est du signe de a à l'extérieur
des racines - $a = 1 > 0$ d'où

$$m^2 - m - 6 > 0 \text{ pour}$$

$$m \in]-\infty; -2[\cup]3; +\infty[$$

$$m+1 > 0$$

$$m > -1$$

$$m-2 > 0 \quad m > 2$$

D'où le tableau des signes:

(2)

x	$-\infty$	-2	-1	2	3	$+\infty$			
signe de $m+1$	-	-	0	+	+	+			
signe de $m-2$	-	-	-	0	+	+			
signe de m^2-m-6	+	0	-	-	-	0	+		
signe de Δ	+	0	-	0	+	0	-	0	+

(E) admet deux solutions distinctes $\Leftrightarrow m \in]-\infty; -2[\cup]-1; 2[\cup]3; +\infty[$

Exercice (2):

$$1) 2x^2 + x - 10 > 0 \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -10 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 1 - 4 \times 2 \times (-10)$$

$$= 81 > 0 \text{ d'où le trinôme admet deux racines distinctes}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 9}{4} = 2$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 9}{4} = -\frac{5}{2}$$

Le trinôme est du signe de a à l'extérieur de ses racines. Or $a = 2 > 0$

$$\text{Donc: } S =]-\infty; -\frac{5}{2}[\cup]2; +\infty[$$

Exercice (3):

$$1) a) x \in [0; 10] \text{ (car } M \in [AC])$$

$$b) \text{ Aire}(MCDP) = CD \times MC = 3 \times (10 - x)$$

$$2) \text{ Dans le triangle } ABC, \left. \begin{matrix} (MN) \\ (BC) \end{matrix} \right\} \frac{1}{1} \frac{(AC)}{(AC)} \text{ d'où } (MN) \parallel (BC)$$

$$\text{D'après le théorème de Thalès, } \frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB} = \frac{MN}{BC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{10} = \frac{MN}{8} \quad \Leftrightarrow \underline{MN} = \frac{8x}{10} = \underline{\frac{4x}{5}}$$

$$2) 9x^2 + 12x + 4 \leq 0 \quad \begin{cases} a = 9 \\ b = 12 \\ c = 4 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 144 - 4 \times 9 \times 4$$

$$= 0 \text{ d'où le trinôme n'a qu'une seule racine. Il est toujours du signe}$$

de a et s'annule en $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{18}$

$$= -\frac{2}{3}$$

$$\text{or, } a = 9 > 0$$

Donc: une seule valeur convient: $-\frac{2}{3}$

$$\underline{S = \left\{ -\frac{2}{3} \right\}}$$

$$3) A(x) = A_{\text{rect}}(AMN) + A_{\text{rect}}(MCDP) \\ = \frac{AM \times MN}{2} + MC \times CD \\ = \frac{x \times \frac{24}{5}x}{2} + (10-x) \times 3$$

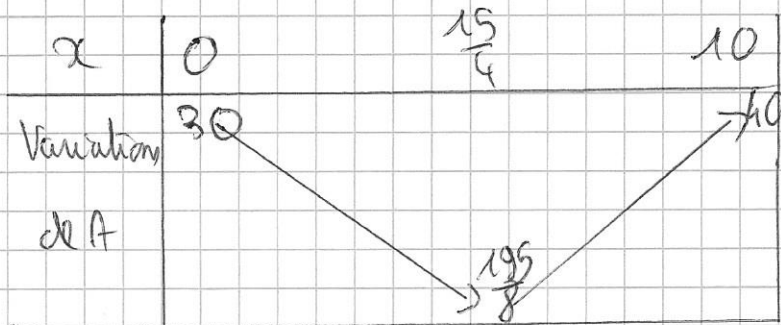
(3)

Donc:

$$A(x) = \frac{2}{5}x^2 - 3x + 30$$

4) $a = \frac{2}{5} > 0$, d'où A est d'abord décroissante, puis croissante.
 $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{\frac{4}{5}} = 3 \times \frac{5}{4} = \frac{15}{4}$ $\beta = A(\alpha) = \frac{2}{5} \left(\frac{15}{4}\right)^2 - 3 \times \frac{15}{4} + 30$

D'où le tableau de variation suivant:



$$= \frac{195}{8} \\ A(10) = \frac{2}{5} \times 100 - 3 \times 10 + 30 \\ = 40$$

5) $A(x)$: minimum pour $x = \frac{15}{4} = 3,75$.

6) $A(x) = 40$

$\Leftrightarrow \frac{2}{5}x^2 - 3x + 30 = 40$

$\Leftrightarrow \frac{2}{5}x^2 - 3x - 10 = 0$ $\begin{cases} a = \frac{2}{5} \\ b = -3 \\ c = -10 \end{cases}$

$\Delta = b^2 - 4ac = 9 + 4 \times 10 \times \frac{2}{5} = 25 > 0$ d'où l'équation admet 2 solutions distinctes.

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+5}{2 \times \frac{2}{5}} = \frac{8}{\frac{4}{5}} = 8 \times \frac{5}{4} = 10$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-5}{2 \times \frac{2}{5}} = \frac{-2}{\frac{4}{5}} = -2 \times \frac{5}{4} = -\frac{5}{2}$

Donc: $S = \left\{ 10; -\frac{5}{2} \right\}$, or $x \geq 0$ Donc $S = \{ 10 \}$

7) $A(x) \geq 25 \Leftrightarrow \frac{2}{5}x^2 - 3x + 30 \geq 25$

$\Leftrightarrow \frac{2}{5}x^2 - 3x + 5 \geq 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \times \frac{2}{5} \times 5 = 1 > 0$ d'où le trinôme admet 2 racines distinctes.

$x_1 = \frac{3+1}{\frac{4}{5}} = 4 \times \frac{5}{4} = 5$ et $x_2 = \frac{3-1}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\frac{4}{5}} = 2 \times \frac{5}{4} = \frac{5}{2} (< 0)$

Le trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines.

$$\text{or } a = \frac{2}{5} > 0, \quad \frac{2}{5}x^2 - 3x + 5 > 0$$

$$\text{pour } x \in]-\infty; -\frac{5}{2}] \cup [5; +\infty[$$

(4)

$$\text{or, } x > 0$$

$$\text{et } x \leq 10$$

Donc:

$$\underline{S = [5; 10]}$$

(M devra se situer entre le milieu de $[Ac]$ et c)

Exercice (4):

$$3x^2 - 4x - 4 = 0 \quad (E_1)$$

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = -4 \\ c = -4 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 16 - 4 \times 3 \times (-4)$$

$= 64 > 0$ d'où l'équation admet 2 solutions distinctes

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + 8}{6} = \frac{12}{6} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - 8}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$\text{D'où: } S = \left\{ 2; -\frac{2}{3} \right\}$$

$$a) \quad 3x^4 - 4x^2 - 4 = 0 \quad (E_2)$$

Posons: $X = x^2$, alors $(E_2) \Leftrightarrow 3X^2 - 4X - 4 = 0 \quad (E_1)$.

On a: $X_1 = 2$ et $X_2 = -\frac{2}{3}$ (d'après la résolution de (E_1)).

On revient à x :

$$x_1^2 = X_1 = 2 \Leftrightarrow x_1 = \sqrt{2} \text{ ou } -\sqrt{2}$$

$$x_2^2 = X_2 = -\frac{2}{3}, \text{ pas de solution réelle.}$$

Par conséquent: $\underline{S = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}}$

b) $\frac{3}{(1-x)^2} - \frac{4}{1-x} - 4 = 0 \quad (E_3)$: valeur interdite: $1-x=0 \Leftrightarrow x=1$

Posons $X = \frac{1}{1-x}$, alors on va résoudre sur $\mathbb{R} - \{1\}$

$$(E_3) \Leftrightarrow 3X^2 - 4X - 4 = 0 \quad (E_1)$$

on a: $X_1 = \frac{1}{1-x_1} = 2 \Leftrightarrow 2(1-x_1) = 1 \Leftrightarrow -2x_1 = -1$

$$X_2 = \frac{1}{1-x_2} = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow -2(1-x_2) = 3 \Leftrightarrow 2x_2 = 5 \Leftrightarrow x_2 = \frac{5}{2}$$

$$\boxed{S = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right\}}$$