$1^{ère}$ 6S — Corrigé du DS n° 1 (Fait le 17/09/2014) — 1

Exercice 1 :

1) $6x^2+9x-6=0$ $\begin{cases} a=6 \\ b=9 \\ c=-6 \end{cases}$

$\Delta = b^2-4ac$

$= 9^2-4\times 6\times(-6)$

$= 81+144$

$= 225>0$ l'équation admet 2 solutions distinctes :

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-9+15}{12} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$

et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-9-15}{12} = \dfrac{-24}{12} = -2$

Donc $S=\left\{\dfrac{1}{2} ; -2\right\}$

2) $49-(5x-1)^2=0$

$\Leftrightarrow 7^2-(5x-1)^2=0$

$\Leftrightarrow (7-(5x-1))(7+(5x-1))=0$

$\Leftrightarrow (-5x+8)(5x+6)=0$

$\Leftrightarrow -5x+8=0$ ou $5x+6=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{8}{5}$ ou $x=-\dfrac{6}{5}$

$S=\left\{\dfrac{8}{5} ; -\dfrac{6}{5}\right\}$

3) $64x^2+16x+1=0$

$\Leftrightarrow (8x+1)^2=0$

$\Leftrightarrow 8x+1=0$

$\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{8}$

$S=\left\{-\dfrac{1}{8}\right\}$

4) $3y^2-y+8=0$ $\begin{cases} a=3 \\ b=-1 \\ c=8 \end{cases}$

$\Delta = b^2-4ac$

$=(-1)^2-4\times 3\times 8$

$=1-96=-95<0$ Pas de solution réelle

Donc $S=\emptyset$

5) $\dfrac{t+1}{t+5} = \dfrac{4t-2}{t+17}$

Valeurs interdites : -5 et -17

$(t+1)(t+17)=(t+5)(4t-2)$

$\Leftrightarrow t^2+\cancel{18t}+17 = 4t^2+\cancel{18t}-10$

$\Leftrightarrow -3t^2+27=0$

$\Leftrightarrow t^2=\dfrac{27}{3}=9$

$\Leftrightarrow t=3$ ou -3

$S=\{-3 ; 3\}$

Exercice 2 :

Par lecture graphique, $S(-2 ; 3)$

Forme canonique de f : $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta = a(x+2)^2+3$

Or, $f(0)=1$ d'où : $a\times 4+3=1 \Leftrightarrow 4a=-2$

$\Leftrightarrow a=-\dfrac{2}{4}=-\dfrac{1}{2}$

Donc : $f(x)=-\dfrac{1}{2}(x+2)^2+3$

Par conséquent, la forme développée et réduite de f :

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x^2+4x+4)+3 = \underline{-\frac{1}{2}x^2-2x+1}$$

Exercice 3 :

1) a)
$$\begin{aligned} f(x) &= 5x^2-7x+2 \\ &= 5\left(x^2-\frac{7}{5}x+\frac{2}{5}\right) \\ &= 5\left(\left(x-\frac{7}{10}\right)^2-\frac{49}{100}+\frac{2}{5}\right) \\ &= 5\left(\left(x-\frac{7}{10}\right)^2-\frac{49}{100}+\frac{40}{100}\right) \\ &= 5\left(\left(x-\frac{7}{10}\right)^2-\frac{9}{100}\right) \\ &= \underline{5\left(x-\frac{7}{10}\right)^2-\frac{9}{20}} \end{aligned}$$

$a=5>0$: f est d'abord décroissante, puis croissante

$\alpha = \frac{7}{10}$, $\beta = -\frac{9}{20}$

x	$-\infty$		$\frac{7}{10}$		$+\infty$
Variations de f		↘	$-\frac{9}{20}$	↗	

b)
$$\begin{aligned} g(x) &= -3(x-4)^2 \\ &= -3(x-4)^2+0 \text{ (Forme canonique de } g) \end{aligned}$$

$a=-3<0$, g est d'abord croissante, puis décroissante

$\alpha = 4$ et $\beta = 0$ _ D'où le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
Variation de g		↗	0	↘	

c)
$$\begin{aligned} R(x) &= (x-1)^2-(3x+4)^2 \\ &= x^2-2x+1-(9x^2+24x+16) \\ &= \underline{-8x^2-26x-15} \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{26}{-16} = -\frac{13}{8}$$

$$\beta = R(\alpha) = R\left(-\frac{13}{8}\right)$$

$$\begin{aligned} R\left(-\frac{13}{8}\right) &= -8\left(-\frac{13}{8}\right)^2-26\times\left(-\frac{13}{8}\right)-15 \\ &= -8\times\frac{169}{64}+\frac{169}{4}-15 \\ &= -\frac{169}{8}+\frac{338}{8}-\frac{120}{8} = \frac{169}{8}-\frac{120}{8} = \frac{49}{8} \end{aligned}$$

Forme canonique :

$$\underline{R(x) = -8\left(x+\frac{13}{8}\right)^2+\frac{49}{8}}$$

x	$-\infty$		$-\frac{13}{8}$		$+\infty$
Variation de h		↗	$\frac{49}{8}$	↘	

Exercice 4 :

$f(x) = -x^2 - 8x + 20$

1) Soit $x \in \mathbb{R}$:

$f(x) = -(x^2 + 8x - 20)$

$= -((x+4)^2 - 16 - 20)$

$= -(x+4)^2 + 36$

2) $f(x) = 36 - (x+4)^2$

$= (6 + (x+4))(6 - (x+4))$

$= (x+10)(-x+2)$

3) x est un antécédent de 0 par $f \Leftrightarrow f(x) = 0$.

On, $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x+10)(-x+2) = 0$

$\Leftrightarrow x = -10$ ou $x = 2$

$S = \{-10 ; 2\}$

1ère méthode

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 8x + 20 = 0$ $\begin{cases} a = -1 \\ b = -8 \\ c = 20 \end{cases}$

2ième méthode

$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times (-1) \times 20$

$= 64 + 80 = 144 > 0$ d'où l'équation admet deux solutions : $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8+12}{-2} = -10$

et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8-12}{-2} = 2$

Donc $S = \{-10, 2\}$

Exercice 5 :

1) $(x+3)(x^2 + x - 30) = x^3 + x^2 - 30x + 3x^2 + 3x - 90$

$= x^3 + 4x^2 - 27x - 90 = f(x)$

2) $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x^2 + x - 30) = 0$

$\Leftrightarrow x + 3 = 0$ ou $x^2 + x - 30 = 0$ (E)

$\Leftrightarrow x = -3$ ou $x^2 + x - 30 = 0$.

(E) : $x^2+x-30=0$ $\quad \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=-30 \end{cases}$

$\Delta = b^2-4ac$

$= 1-4\times1\times(-30)$

$= 121 > 0$ d'où l'équation admet 2 solutions distinctes.

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+11}{2} = 5$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-11}{2}$

$= -6$

Par conséquent : $\underline{S = \{-3\,;\,5\,;\,-6\}}$

Exercice (6) :

$f(x) = ax^2+bx+c \quad (a \neq 0)$

$\Delta = b^2-4ac > 0$

1) $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1+x_2 = \dfrac{-b+\cancel{\sqrt{\Delta}}-b-\cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a} = \dfrac{-2b}{2a} = \underline{-\dfrac{b}{a}}$

$x_1\times x_2 = \left(\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\times\left(\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

$= \dfrac{1}{4a^2}\left((-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2\right) = \dfrac{1}{4a^2}\left(b^2-(b^2-4ac)\right)$

$= \dfrac{1}{4a^2}\left(\cancel{b^2}-\cancel{b^2}+4ac\right)$

$= \dfrac{4\cancel{a}c}{4a^2} = \underline{\dfrac{c}{a}}$

3) a) Soit $x_1 = -3$

$x_2 = -\dfrac{b}{a} - x_1 = -\dfrac{b}{a}+3$

b) Posons par exemple $a=1$ et $b=2$

alors $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{2}{1} = -2$ d'où $x_2 = -2+3 = 1$

On peut avoir alors $f(x) = x^2+2x+c$

or, $\dfrac{c}{a} = 1\times(-3) = -3 \iff c = -3a = -3$

Donc : $\underline{f(x) = x^2+2x-3}$