

Exercice (1):

1)  $f'(0)$ : coefficient directeur de la tangente à la courbe de  $f$  au point d'abscisse 0 (au point B)

Par lecture graphique:  $f'(0) = \frac{5-1}{1-0} = \boxed{4}$

$f'(2)$ : coefficient directeur de la tangente à la courbe de  $f$  au point d'abscisse 2 (au point C)

C'est une tangente horizontale en C, donc:  $f'(2) = \boxed{0}$

$f'(3)$ : coefficient directeur de la tangente à la courbe de  $f$  au point d'abscisse 3 (au point A)

Par lecture graphique:  $f'(3) = \frac{-4}{2} = \boxed{-2}$

2)  $(T_A): y = f'(3)(x-3) + f(3)$

$$= -2(x-3) + 4$$

$$= -2x + 6 + 4$$

Donc:  $(T_A): y = -2x + 10$

3)  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$        $g(0) = \frac{1}{f(0)} = \frac{1}{1} = \boxed{1}$

$g$  est dérivable pour tout  $x$  tq  $f(x) \neq 0$

En 0,  $g$  est dérivable.

$$g'(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2} \quad \text{d'où} \quad \underline{g'(0)} = \frac{-f'(0)}{(f(0))^2} = \frac{-4}{1^2} = \boxed{-4}$$

Exercice (2):

$$A(x) = \text{Aire}(OMN)$$

$$A(1;1)$$

$$M(x;0)$$

Soit  $B(1;0)$

Dans le triangle  $MON$ , rectangle en  $O$ , on a  $(AB) \parallel (ON)$

On peut appliquer le théorème de Thalès:  $\frac{MB}{MO} = \frac{MA}{MN} = \frac{AB}{NO}$

Donc:  $\frac{x-1}{x} = \frac{1}{OM}$  Donc:  $OM = \frac{x}{x-1}$  (x > 1: donc OM bien défini). (2)

2)  $A(x) = \frac{OM \times OM}{2} = \frac{x \times \frac{x}{x-1}}{2}$

Donc  $A(x) = \frac{x^2}{2(x-1)}$

3) A est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ :

On pose  $u(x) = x^2$   $v(x) = 2(x-1)$

$u'(x) = 2x$   $v'(x) = 2$

Donc:  $A'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$

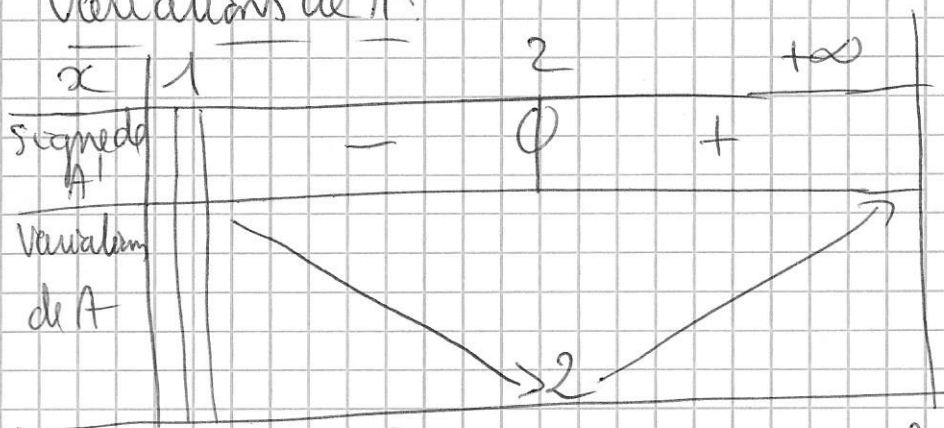
$= \frac{2x \times 2(x-1) - 2x^2}{4(x-1)^2}$

$= \frac{2x^2 - 4x}{4(x-1)^2} = \frac{2x(x-2)}{4(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{2(x-1)^2}$

4) Sur  $]1; +\infty[$ :

| x              | 1 | 2 | $+\infty$ |
|----------------|---|---|-----------|
| signe de $x$   | + | + | +         |
| signe de $x-2$ | - | 0 | +         |
| signe de $A'$  | - | 0 | +         |

Variations de A:



$A(2) = \frac{4}{2(2-1)} = 2$

En  $x=2$ , la dérivée de A s'annule et change de signe.

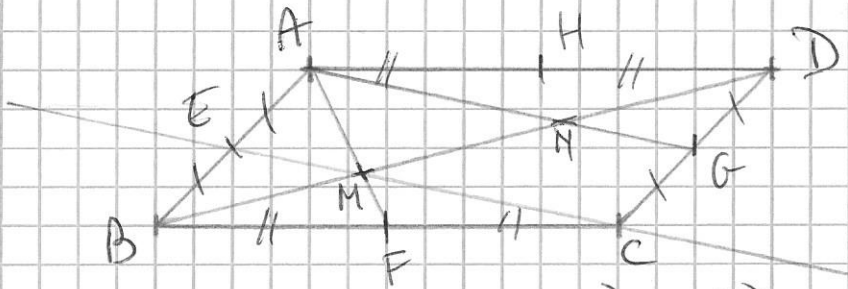
A admet un minimum en 2 et vaut 2

L'aire du triangle est minimale en  $x=2$  et vaut 2 cm<sup>2</sup>

# Exercice (3):

(3)

1)



2) ABCD est non-aplati, d'où  $\vec{AB}$  et  $\vec{AD}$  ne sont pas colinéaires  
A point commun : origine des 2 vecteurs.

Donc  $(A; \vec{AB}, \vec{AD})$  est bien un repère du plan

3) A : origine du repère donc :  $A(0; 0)$

$$\vec{AB} = 1\vec{AB} + 0\vec{AD} \text{ d'où } B(1; 0)$$

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} \text{ d'où } C(1; 1)$$

$$\vec{AD} = 0\vec{AB} + 1\vec{AD} \text{ d'où } D(0; 1)$$

$$\vec{AE} = \frac{1}{2}\vec{AB} \text{ (car E est le milieu de } [AB])$$

$$\text{d'où } E\left(\frac{1}{2}; 0\right)$$

$$\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{BF} \text{ (relation de Chasles)}$$

$$= \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC} \text{ (car F milieu de } [BC])$$

$$= \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD} \text{ (car ABCD parallélogramme } \Leftrightarrow \vec{BC} = \vec{AD})$$

Donc :

$$F\left(1; \frac{1}{2}\right)$$

$$\vec{AG} = \vec{AD} + \vec{DG} \text{ (relation de Chasles)}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AD} \text{ d'où : } G\left(\frac{1}{2}; 1\right)$$

$$\vec{AH} = \frac{1}{2}\vec{AD} \text{ car H milieu de } [AD]$$

$$= 0\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD} \text{ donc } H\left(0; \frac{1}{2}\right)$$

4) Equation cartésienne de (BD):

$$\vec{BD} \begin{pmatrix} x_D - x_B \\ y_D - y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Soit } M(x; y) \in (BD):$$

$$\vec{BM} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y \end{pmatrix}$$

$\vec{BM}$  et  $\vec{BD}$  sont colinéaires  $\Leftrightarrow x_{\vec{BM}} \times y_{\vec{BD}} = x_{\vec{BD}} \times y_{\vec{BM}}$  (4)

$$\Leftrightarrow (x-1) \times 1 = -1 \times y$$

$$\Leftrightarrow x - 1 + y = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y - 1 = 0$$

Equation cartésienne de (BD):

$$x + y - 1 = 0$$

5)  $M(x; y)$  point d'intersection entre  $\{AF\}$  et  $\{BD\}$

D'où  $(x; y)$  solution du système suivant:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - y = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ x + \frac{1}{2}x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ \frac{3}{2}x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Donc  $M\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$

$N(x; y)$  point d'intersection entre  $\{AG\}$  et  $\{BD\}$

d'où  $(x; y)$  solution du système suivant:

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2}y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}y + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}y \\ \frac{3}{2}y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Donc  $N\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$

$$\begin{aligned} 6) \vec{DN} &= (x_N - x_D; y_N - y_D) \\ &= \left(\frac{1}{3} - 0; \frac{2}{3} - 1\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{NM} &= (x_M - x_N; y_M - y_N) \\ &= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}; \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{MB} &= (x_B - x_M; y_B - y_M) \\ &= \left(1 - \frac{2}{3}; 0 - \frac{1}{3}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

Par conséquent:

$$\vec{DN} = \vec{NM} = \vec{MB}$$

(des vecteurs ayant les mêmes coordonnées)

7)  $\vec{EM} = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}; \frac{1}{3} - 0\right) = \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right)$  et  $\vec{EC} = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$  sont égaux.

$\vec{EC}$  colinéaire avec un p.c.m.m.

# Exercice (4):

(5)

1) a) Avec une seule couche de mousse isolante:

- Consommation annuelle de chauffage:

$$750 \times \left(1 - \frac{2,5}{100}\right) = 750 \times 0,975 \\ = 731,25 \text{ €}$$

- Intensité du bruit dans l'appartement:

$$110 - 2 \times 3 - 9 = 110 - 15 = 95 \text{ décibels}$$

b) Avec 2 couches de mousse isolante:

- Consommation annuelle de chauffage:

$$731,25 \times \left(1 - \frac{2,5}{100}\right) = 731,25 \times 0,975 \\ \approx 712,97 \text{ €}$$

- Intensité du bruit dans l'appartement:

$$95 - 9 = 86 \text{ décibels}$$

2) a)  $u_1 = 95$  et  $v_1 = 731,25$  (d'après question 1a))

b) A chaque fois qu'on ajoute une couche isolante, on perd 9 décibels. D'où  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est arithmétique de raison -9 et de premier terme  $u_1 = 95$ .

c) A chaque fois qu'on ajoute une couche isolante, la consommation annuelle de chauffage baisse de 2,5%.

Elle est donc multipliée à chaque fois par  $1 - \frac{2,5}{100} = 0,975$ .

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est géométrique de raison 0,975 et de premier terme  $v_1 = 731,25$ .

3 a) Comme  $(u_n)$  est arithmétique:

$$u_n = u_1 + (n-1) \times r \\ = 95 + (n-1) \times (-9)$$

$$u_n = 95 - 9(n-1), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

b) Comme  $(v_n)$  est géométrique:

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} = 731,25 \times 0,975^{n-1}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

4) a) N doit vérifier :  $95 - 9 \times (N-1) \leq 40$   
 $-9N + 104 \leq 40 \Leftrightarrow 9N \geq 104 - 40$   
 $\Leftrightarrow 9N \geq 64$   
 $\Leftrightarrow N \geq \frac{64}{9} \approx 7,1$

On prend donc  $N=8$  (plus petit entier naturel vérifiant la condition demandée).

b) Pour  $N=8$  : on calcule  $v_8 = 731,25 \times 0,975^7$   
 $\approx \underline{612,49 \text{ €}}$  : consommation annuelle de Bob

c) Pourcentage de diminution :

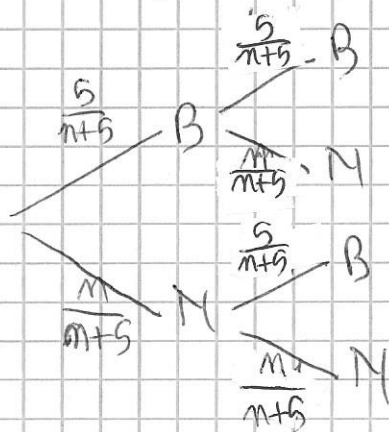
$$\frac{750 - 612,49}{750} \approx 0,183$$

La consommation de chauffage a donc baissé d'environ 18,3%.

Exercice (5) : 5 boules blanches,  $n$  boules noires ( $n \geq 3$ )

1) Deux tirages successifs avec remise :

Modélisons la situation à l'aide d'un arbre pondéré :



Les issues possibles :  $(B, B), (B, N), (N, B), (N, N)$

Valeurs possibles pour  $X$  :

$$\{4; 1; -2\}$$

Loi de  $X$  :

| $x_i$      | -2                             | 1                     | 4                              |
|------------|--------------------------------|-----------------------|--------------------------------|
| $P(X=x_i)$ | $\left(\frac{n}{n+5}\right)^2$ | $\frac{10n}{(n+5)^2}$ | $\left(\frac{5}{n+5}\right)^2$ |

$$P(X=4) = \left(\frac{5}{n+5}\right)^2$$

$$P(X=-2) = \left(\frac{n}{n+5}\right)^2$$

$$P(X=1) = 2 \times \frac{5}{n+5} \times \frac{n}{n+5}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } E(X) &= -2 \times \left(\frac{n}{n+5}\right)^2 + \frac{10n}{(n+5)^2} + 4 \times \left(\frac{5}{n+5}\right)^2 \\ &= \frac{-2n^2 + 10n + 100}{(n+5)^2} \end{aligned}$$

Le jeu est équitable  $\Leftrightarrow E(X) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{-2n^2 + 10n + 100}{(n+5)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2n^2 + 10n + 100 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 100 - 4 \times (-2) \times 100$$

$= 900 > 0$  l'équation a donc 2 solutions

$$n_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 + 30}{-4} = \frac{20}{-4} = -5 < 0 \text{ distributions impossible.}$$

$$n_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 - 30}{-4} = 10$$

Le jeu est équitable pour  $n = 10$

d) On suppose que  $n = 10$ :

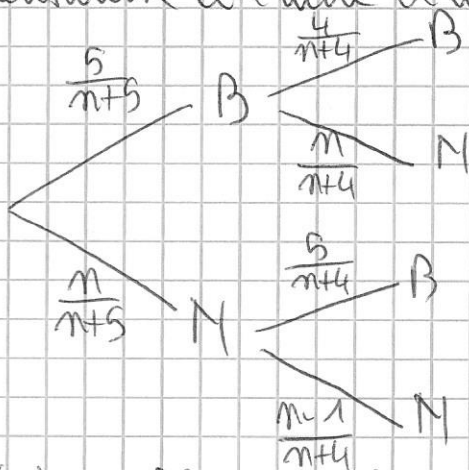
$$\begin{aligned} V(X) &= p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + p_3(x_3 - E(X))^2 \\ &= \left(\frac{n}{n+5}\right)^2 (-2 - 0)^2 + \frac{10n}{(n+5)^2} (1 - 0)^2 + \left(\frac{5}{n+5}\right)^2 (4 - 0)^2 \\ &= \left(\frac{10}{15}\right)^2 \times 4 + \frac{100}{15^2} + \left(\frac{25}{15^2}\right) \times 16 \\ &= \frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{16}{9} = \frac{36}{9} = 4 \end{aligned}$$

Ecart-type:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{4} = 2$$

2) Tirages successifs sans remise:

Modélisation à l'aide d'un arbre pondéré:



a) Valeurs prises par  $Y$ :

b) Table de  $Y$ :

| $y_i$      | 4                       | 1                        | -2                          |
|------------|-------------------------|--------------------------|-----------------------------|
| $P(Y=y_i)$ | $\frac{20}{(n+5)(n+4)}$ | $\frac{10n}{(n+5)(n+4)}$ | $\frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$ |

$$P(Y=4) = \frac{5}{n+5} \times \frac{4}{n+4} = \frac{20}{(n+5)(n+4)}$$

$$P(Y=-2) = \frac{n}{n+5} \times \frac{n-1}{n+4} = \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$$

$$P(Y=1) = 2 \times \frac{5n}{(n+5)(n+4)}$$

$$\begin{aligned} c) E(Y) &= 4 \times \frac{20}{(n+5)(n+4)} + \frac{10n}{(n+5)(n+4)} - \frac{2n(n-1)}{(n+5)(n+4)} \\ &= \frac{-2n^2 + 12n + 80}{(n+5)(n+4)} \end{aligned}$$

$$= \frac{10n}{(n+5)(n+4)}$$

$$E(X) = \frac{-2n^2 + 12n + 80}{(n+5)(n+4)}$$

$$E(Y) = 0 \Leftrightarrow -2n^2 + 12n + 80 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 144 - 4 \times (-2) \times 80 = 784 > 0$$

L'équation admet deux solutions distinctes

$$n_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-12 + 28}{-4} = \frac{16}{-4} = -4 < 0 \text{ impossible car } n \in \mathbb{N}$$

$$n_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-12 - 28}{-4} = \frac{-40}{-4} = 10$$

Donc : pour  $n = 10$ ,  $E(Y) = 0 \Leftrightarrow$  le jeu est équitable.

d)  $E(Y) = \frac{-2n^2 + 12n + 80}{(n+5)(n+4)}$  avec  $(n+5)(n+4) > 0$

$$-2n^2 + 12n + 80 \geq 0 \text{ à l'intérieur des racines}$$

or, on a trouvé  $n_1 = -4$  et  $n_2 = 10$

Donc pour  $n \leq 10$ ,  $E(X) \geq 0$

Le jeu est donc favorable au joueur

c'est pourquoi Cynthia déclare qu'elle ne joue que si  $n \leq 10$

3) On donne deux euros pour jouer :

a) valeurs prises par  $X$  :  $\{-4; -1; 2\}$

$$E(X) = -4 \times \left(\frac{n}{n+5}\right)^2 - 1 \times \frac{10n}{(n+5)^2} + 2 \times \left(\frac{5}{n+5}\right)^2$$

$$= \frac{-4n^2 - 10n + 50}{(n+5)^2}$$

Valeurs prises par  $Y$  :  $\{-4; -1; 2\}$

$$E(Y) = 2 \times \frac{20}{(n+5)(n+4)} - \frac{10n}{(n+5)(n+4)} - \frac{4n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$$

$$= \frac{-4n^2 - 6n + 40}{(n+5)(n+4)}$$

b) Étude du signe de  $E(X)$  :

$$(n+5)^2 > 0 \text{ d'où le signe de } E(X) \text{ ne dépend que de } -4n^2 - 10n + 50$$

Etude du signe de  $-4n^2 - 10n + 50$  :

(9)

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 100 + 16 \times 50$$

$= 900 > 0$  d'où le trinôme admet 2 racines distinctes.

$$m_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 + 30}{-8} = \frac{40}{-8} = -5$$

$$m_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 - 30}{-8} = \frac{-20}{-8} = \frac{5}{2}$$

Le trinôme est du signe de  $a$  à l'extérieur de ses racines.

Or,  $a = -4 < 0$ . D'où  $-4n^2 - 10n + 50 \geq 0$  pour  $n \in [-5; \frac{5}{2}]$

Or,  $n \in \mathbb{N}$

Donc:  $n \in \{0; 1; 2\}$

Or, d'après l'énoncé,  $n \geq 3$ , donc cette situation est impossible.

D'où  $E(X) < 0$  (jeu défavorable au joueur). (1)

Etude du signe de  $E(Y)$ .

Comme  $(n+5)(n+4) > 0$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$

le signe de  $E(Y)$  ne dépend que de celui de  $-4n^2 - 6n + 40$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 36 + 16 \times 40$$

$= 676 > 0$ , d'où le trinôme admet 2 racines distinctes.

$$m_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 + 26}{-8} = \frac{32}{-8} = -4$$

$$m_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 - 26}{-8} = \frac{-20}{-8} = \frac{5}{2}$$

Même raisonnement que pour  $E(X)$ ,  $n \in \{0; 1; 2\}$

Or,  $n \geq 3$

D'où  $E(Y) < 0$  (jeu défavorable au joueur). (2)

C'est pourquoi Cynthia ne souhaite pas jouer. d'après (1) et (2)