Première S

Corrigé du Bac Blanc n° 1

(Fait le 13/01/2015)

1

Exercice 1 :

1) La proposition est fausse. Contre-exemple : si $x = \frac{1}{2}$, $x^2 = \frac{1}{4}$ et $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ d'où $x^2 < x$

2) La proposition est fausse.

$\sqrt{x} = x$ est définie sur $[0; +\infty[$

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{x} = x \iff x = x^2 \iff x^2 - x = 0 \iff x(x-1) = 0 \\ \iff x = 0 \text{ ou } x - 1 = 0 \\ \iff x = 0 \text{ ou } x = 1\end{array}\right\} S = \{0; 1\}$$

D'où l'équation admet deux solutions sur $[0; +\infty[$

3) $u_n = (n+1)^2 - n^2$. D'où $u_{n+1} = (n+2)^2 - (n+1)^2$

$$= \cancel{n^2} + 4n + 4 - \cancel{n^2} - 2n - 1$$

$$= 2n + 3, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Donc : la proposition est vraie

4) $\left.\begin{array}{l} f(x) = -2x^2 - x + 1. \text{ Graphiquement, } f(0) = 3 \\ \text{or, par le calcul, } f(0) = 1 \end{array}\right\}$ Donc : La proposition est fausse.

5) $u_n = 4 - 3n$. (u_n) suite arithmétique :

$$S = u_3 + u_4 + \ldots + u_{27} + u_{28} = \text{nombre de termes} \times \frac{1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

$$= (28 - 3 + 1) \times \frac{u_3 + u_{28}}{2}$$

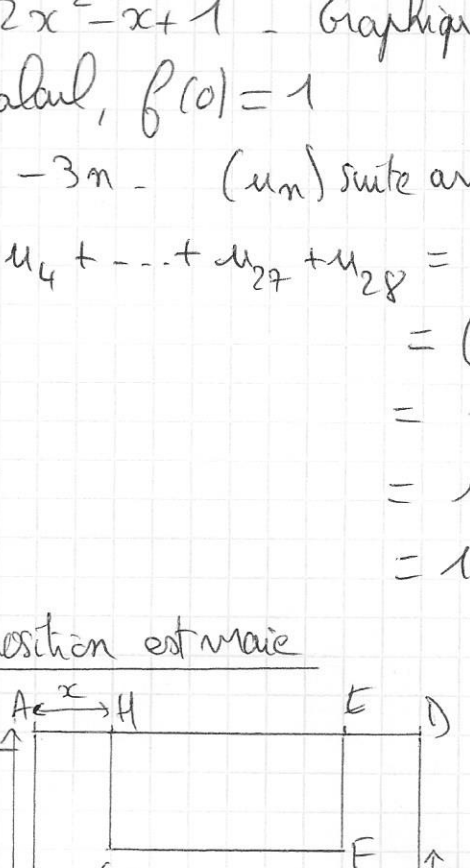
$$= 13 \times (4 - 3\times 3 + 4 - 3\times 28)$$

$$= 13 \times (-5 + 4 - 84)$$

$$= 13 \times (-85) = \underline{-1105}$$

Donc la proposition est vraie

Exercice 2 :



1) $\left.\begin{array}{l} x > 0,6\text{ m} \\ \text{et } x < 12\text{ m}\end{array}\right\} \underline{0,6 < x < 12}$

2) Aire (allées) $= A(x) =$ Aire $(ABCD) -$ Aire $(EFGH)$

$$= 30 \times 12 - (30 - 2x) \times (12 - x)$$

$= 360 - (360 - 30x - 24x + 2x^2)$

$= \cancel{360} - \cancel{360} + 30x + 24x - 2x^2$

Donc $\underline{A(x) = 54x - 2x^2}$

3) $A(x) = -2x^2 + 54x$ $\quad \begin{cases} a = -2 \\ b = 54 \\ c = 0 \end{cases}$

$a < 0$, d'où A est d'abord croissante, puis décroissante

On a : $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-54}{-4} = 13{,}5$

$\beta = A(\alpha) = -2 \times 13{,}5^2 + 54 \times 13{,}5 = 364{,}5$

D'où le tableau de variations de A :

x	$-\infty$	$13{,}5$	$+\infty$
Variation de A	$\nearrow$	$364{,}5$	$\searrow$

⚠ ⚠ En réalité : Le maximum de A est 360 et il est atteint en $x = 12$ (car $x \leq 12$ et A est croissante sur $]-\infty ; 12]$)

Mais sur $\mathbb{R}$, le maximum est 364,5 et il est atteint en $x = 13{,}5$

4) a) Aire (partie gazonnée) = Aire (EFGH) = $360 - A(x)$

On souhaite que la partie gazonnée ait une aire au moins égale à 216 m²

$\Leftrightarrow \quad 360 - A(x) \geq 216$

$\Leftrightarrow \quad \underline{A(x) \leq 360 - 216 = 144}$

b) $-2x^2 + 54x \leq 144$

$\Leftrightarrow -2x^2 + 54x - 144 \leq 0$

$\Leftrightarrow -x^2 + 27x - 72 \leq 0$

$\begin{cases} a = -1 \\ b = 27 \\ c = -72 \end{cases}$ $\quad \Delta = b^2 - 4ac = 27^2 - 4 \times (-1) \times (-72) = 441 > 0$

D'où le trinôme admet 2 racines distinctes :

$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-27 + \sqrt{441}}{2 \times (-1)} = \dfrac{-27 + 21}{-2} = 3$

$x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-27 - \sqrt{441}}{2 \times (-1)} = \dfrac{-27 - 21}{-2} = 24$

Le trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines. Or, $a < 0$

Donc $\underline{S = [0{,}6 ; 3]}$

Compte-tenu de l'encadrement pour x obtenu à la question 1).

Exercice 3 :

u_n : somme versée par la grand-mère à son n-ième anniversaire

$u_0 = 150$

1) u_{n+1} = somme versée par la grand-mère à son $n+1$-ième anniversaire

Augmentation de 3 % par rapport à l'an dernier :

On multiplie par $1 + \frac{3}{100} = \frac{103}{100} = 1{,}03$

Comme chaque année, elle dépose aussi 150 €.

Alors :

$u_{n+1} = 1{,}03 u_n + 150$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

2)

$u_0 = 150$ - $u_1 = 1{,}03 u_0 + 150 = 1{,}03 \times 150 + 150 = 304{,}5$

$u_2 = 1{,}03 u_1 + 150 = 1{,}03 \times 304{,}5 + 150 = 463{,}635$

On a : $u_1 - u_0 = 304{,}5 - 150 = 154{,}5$

$u_2 - u_1 = 463{,}635 - 304{,}5 = 159{,}135$

$\Big\}$ $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$, donc (u_n) pas arithmétique

$\frac{u_1}{u_0} = \frac{304{,}5}{150} = 2{,}03$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{463{,}635}{304{,}5} = 1{,}52$

D'où $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$, donc (u_n) n'est pas géométrique.

3) $v_n = u_n + 5000$

a) $v_{n+1} = u_{n+1} + 5000 = 1{,}03 u_n + 150 + 5000$

$= 1{,}03 u_n + 5150$

$= 1{,}03 \left(u_n + \frac{5150}{1{,}03}\right) = 1{,}03 (u_n + 5000)$

$= 1{,}03\, v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc : (v_n) est une suite géométrique de raison $1{,}03$

et de premier terme $v_0 = u_0 + 5000 = 150 + 5000$

$= 5150$

b) Comme (v_n) est géométrique :

$v_n = v_0 \times q^n = 5150 \times 1{,}03^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

c) Comme $v_n = u_n + 5000$, alors $u_n = v_n - 5000$

Donc : $u_n = 5150 \times 1{,}03^n - 5000$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

4) a) $T_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

$= 1^{er}$ terme $\times \dfrac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$

$= v_0 \times \dfrac{1 - 1{,}03^{n+1}}{1 - 1{,}03}$

Donc $\underline{T_n} = 5150 \times \dfrac{1 - 1{,}03^{n+1}}{-0{,}03} = \underline{\dfrac{5150}{0{,}03}(1{,}03^{n+1} - 1)}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

b) $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$= (v_0 - 5000) + (v_1 - 5000) + \dots + (v_n - 5000)$

$= \underbrace{v_0 + v_1 + \dots + v_n}_{T_n} \underbrace{- 5000 - 5000 + \dots - 5000}_{n+1 \text{ termes tous égaux à } -5000}$

Donc $S_n = T_n - 5000(n+1)$

Or, d'après la question 4 a) : $T_n = \dfrac{5150}{0{,}03}(1{,}03^{n+1} - 1)$

Par conséquent : $\underline{S_n = \dfrac{5150}{0{,}03}(1{,}03^{n+1} - 1) - 5000(n+1)}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

5) a) S correspond à la somme disponible sur le compte au $n$ième anniversaire de Robert. S est initialisée à 150 : ce qui correspond au dépôt initial.

b) A chaque passage dans la boucle, n s'incrémente.
Comme n a été initialisé à 0, avant le premier passage de boucle. Par conséquent, <u>n compte le nombre de boucles effectuées</u>.

c) <u>Algorithme</u> : <u>Déclaration des variables</u> Var u, n, S

Début

<u>Traitement</u> : n prend la valeur 0
u prend la valeur 150
S prend la valeur 150
Tant que <u>(S < 58000)</u> Faire
n prend la valeur $n+1$
u prend la valeur <u>$u \times 1{,}03 + 150$</u>
S prend la valeur <u>S + u</u>
Fin Tant que

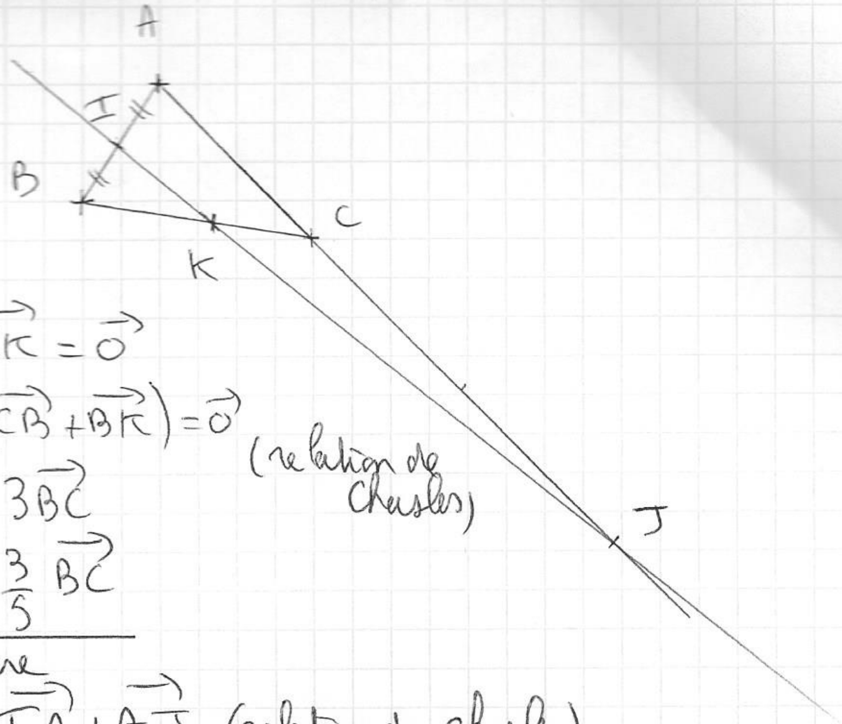
<u>Sortie</u> : Afficher n

Fin

6) <u>A la calculatrice</u> :
On trouve $n = 24$ (S = 62 765 €)
Robert pourra s'acheter son véhicule <u>à 24 ans</u>.

Exercice 4 :

1)



2) $2\overrightarrow{BK} + 3\overrightarrow{CK} = \vec{0}$

a) $2\overrightarrow{BK} + 3(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BK}) = \vec{0}$ (relation de Chasles)

$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{BK} = 3\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BK} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$

b) voir la figure

3) $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}$ (relation de Chasles)

$= -\overrightarrow{AI} + 3\overrightarrow{AC}$

$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ (car comme I est le milieu de [AB] $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BK}$ (relation de Chasles)

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$ (relation de Chasles)

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$

$= -\frac{1}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$

4) $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{5}\overrightarrow{IJ}$ donc $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires, avec un point commun.

Donc I, J et K sont alignés

Exercice 5 : $A(2;3)$ $B(6;1)$ $C(5;-9)$, $D(-2;-5)$ $E(0;5)$

1) Equation cartésienne de (AB) :

$\overrightarrow{AB}(6-2; 1-3)$ $\overrightarrow{AB}(4; -2)$: vecteur directeur de (AB)

On pose $\begin{cases} -b = 4 \\ a = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -4 \end{cases}$

D'où $(AB) : -2x - 4y + c = 0$

or, $A \in (AB)$, d'où $-2\times 2 - 4\times 3 + c = 0 \Leftrightarrow c = 16$

Donc : $(AB) : -2x - 4y + 16 = 0$

2) $(d) // (AB)$ et $C \in (d)$.

$\vec{AB}$ ~~est~~ donc un vecteur directeur de (d) :

D'où $(d) : -2x - 4y + c = 0$

Or, $C \in (d) \iff -2 \times 5 - 4 \times (-9) + c = 0$

$\iff -10 + 36 + c = 0$

$\iff c = -26$

Donc : $(d) : -2x - 4y - 26 = 0$

$D(-2 ; -5)$:

$-2 \times (-2) - 4 \times (-5) - 26 = 4 + 20 - 26 = -2 \neq 0$

Donc $D \notin (d)$

3)

$C \in (d)$, mais $D \notin (d)$, d'où (AB) et (CD) ne sont pas parallèles, ni confondues.

Donc : (AB) et (CD) sont sécantes

4) $\vec{ED}(-2 ; -10)$: vecteur directeur de la droite (ED)

on pose $\begin{cases} -b = -2 \\ a = -10 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -10 \\ b = 2 \end{cases}$

$(ED) : -10x + 2y + c = 0$

Or, $E \in (ED) \iff 2 \times 5 + c = 0$

$\iff c = -10$

Donc : $(ED) : -10x + 2y - 10 = 0$

5) $(AB) : -2x - 4y + 16 = 0$

$(ED) : -10x + 2y - 10 = 0$

$(AB) \not\parallel (ED)$ car les coefficients a et b entre les deux équations ne sont pas proportionnels.

$-2 \times 5 = -10$

$-4 \times 5 = -20 \neq 2$.

D'où (AB) et (ED) sont sécantes. Soit $(x ; y)$ coordonnées du point d'intersection des 2 droites : $(x ; y)$ solution du système suivant :

$$\begin{cases} -2x - 4y = -16 \\ -10x + 2y = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} -x - 2y = -8 \\ -5x + y = 5 \ (\times 2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x - 2y = -8 \\ -10x + 2y = 10 \quad (L_1 + L_2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x - 2y = -8 \\ -11x = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{2}{11} - 2y = -8 \\ x = -\frac{2}{11} \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{1}{11} + 4 \\ x = -\frac{2}{11} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = \frac{45}{11} \\ x = -\frac{2}{11} \end{cases}$$

Donc le point de coordonnées $\left(-\frac{2}{11} ; \frac{45}{11}\right)$ est le point d'intersection des droites (AB) et (ED).