CORRIGÉ

Première 6S [redacted]	**Rattrapage du contrôle de maths** *Equations trigonométriques/Produit scalaire*	Fait le 03/06/15

– Calculatrice autorisée
– Durée : 45 min

Observations :

NOTE :

Exercice 1 : (A compléter directement sur le sujet)

/5

1) Résoudre sur [0;2π[l'équation suivante :

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

d'où $\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

avec $\frac{5\pi}{4} \in [0;2\pi[$

2

$\pi - \frac{5\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} \notin [0;2\pi[$, $-\frac{\pi}{4}+2\pi = \frac{7\pi}{4} \in [0;2\pi[$ il n'y en a pas d'autres.

Donc $\boxed{S = \left\{\frac{5\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right\}}$

2) Résoudre dans [-2π ; 2π[, l'équation suivante :

$2\cos(2x) = 1 \iff \cos 2x = \frac{1}{2}$

Dans ℝ :

$2x = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ ou $2x = -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ d'où $x = \frac{\pi}{6}\ [\pi]$ ou $-\frac{\pi}{6}\ [\pi]$

Dans $[-2\pi;2\pi[$:

$\frac{\pi}{6} \in [-2\pi;2\pi[$ et $-\frac{\pi}{6} \in [-2\pi;2\pi[$ Déterminons tous les $x = \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ ou $-\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ situés dans $[-2\pi;2\pi[$

3

Il y a 8 solutions en tout :

$\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{6};-\frac{\pi}{6};\frac{7\pi}{6};-\frac{7\pi}{6};\frac{5\pi}{6};-\frac{5\pi}{6};\frac{11\pi}{6};-\frac{11\pi}{6}\right\}}$

Exercice 2 : ***(Les questions de cet exercice sont indépendantes)***

/15

Répondre aux questions suivantes et justifier directement sur le sujet :

1) Montrer que l'ensemble des points M(x;y) tels que : $3x^2 + 3y^2 - 42x + 6y + 126 = 0$ est un cercle dont on donnera le rayon et les coordonnées du centre :

$3x^2+3y^2-42x+6y+126=0 \iff x^2+y^2-14x+2y+42=0$

$\iff (x-7)^2-49+(y+1)^2-1+42=0$

$\iff (x-7)^2+(y+1)^2=8$ D'où l'ensemble cherché est le cercle de centre $I(7;-1)$ et de rayon $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

3

2) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Montrer soigneusement que :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{4}\left[\,\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right]$$

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$ (identité remarquable) 3

de même $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = (\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$

D'où $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 4\,\vec{u}\cdot\vec{v}$ Donc : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{4}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right]$

3) Soient E(1;4), F(-3;5) , G(-2;-6) et H(2;-1)

a) Calculer $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{GH}$ $\quad \overrightarrow{EF}(-3-1\,;\,5-4)$ $\quad \overrightarrow{GH}(2+2\,;\,-1+6)$

$(-4\,;\,1) \qquad (4\,;\,5)$ 1,5

D'où $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{GH} = -4\times4 + 1\times5 = \boxed{-11}$

b) Déterminer une équation du cercle de diamètre [EH]

2 méthodes :

① Soit M milieu de [EH] :

$M\left(\frac{x_E+x_H}{2}\,;\,\frac{y_E+y_H}{2}\right)$

$M\left(\frac{3}{2}\,;\,\frac{3}{2}\right)$

Et, $R = \frac{EH}{2} = \frac{\sqrt{(2-1)^2+(-1-4)^2}}{2}$

$= \frac{\sqrt{26}}{2}$

D'où une équation du cercle est :

$(x-\frac{3}{2})^2 + (y-\frac{3}{2})^2 = \frac{26}{4} = \frac{13}{2}$

② Soit $M(x;y)$ un point du cercle : $M \neq E$ et $M \neq H$

alors : $\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MH} = 0$

Or, $\overrightarrow{ME}(1-x\,;\,4-y)$ $\overrightarrow{MH}(2-x\,;\,-1-y)$

D'où $\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MH} = (1-x)(2-x) + (4-y)(-1-y)$

$= 2-3x+x^2-4-3y+y^2 = 0$

$\Leftrightarrow \underline{x^2+y^2-3x-3y-2=0}$ 1,5

4) On considère la droite (d_1) : $5x - 3y + 1 = 0$

Déterminer une équation cartésienne de la droite (d_2) telle que $(d_2) \perp (d_1)$ et $A(2;-3) \in (d_2)$

$\vec{n}(5\,;-3)$ est un vecteur normal à (d_1). Comme $(d_2) \perp (d_1)$, $\vec{n}$ est un vecteur directeur de (d_2). D'où une équation cartésienne de (d_2) :

$(d_2) : -3x - 5y + c = 0$. Or, $A(2;-3) \in (d_2)$ 3

D'où : $-3\times2 - 5\times(-3) + c = 0 \Leftrightarrow c = -9$

Donc : $\underline{(d_2) : -3x - 5y - 9 = 0}$

5) Soient A(2;-3) , B(1;5) et C(2;7) dans un repère orthonormé du plan. Calculer en degrés une mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ à 0,1 près

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BA}\|\times\|\overrightarrow{BC}\|\times\cos\widehat{ABC}$ avec $\overrightarrow{BA}(2-1\,;\,-3-5)$ $\quad \overrightarrow{BC}(2-1\,;\,7-5)$

$(1\,;\,-8) \qquad (1\,;\,2)$

Or, $\|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{1^2+(-8)^2} = \sqrt{65}$

et $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$ $\quad$ D'où $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \sqrt{5}\times\sqrt{65}\times\cos\widehat{ABC}$

Or, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 1\times1 + (-8)\times2 = -15$

D'où $-15 = \sqrt{5}\times\sqrt{65}\times\cos\widehat{ABC}$ 3

c'est-à-dire $\cos\widehat{ABC} = \frac{-19}{\sqrt{5}\times\sqrt{65}}$

Donc : $\widehat{ABC} = \cos^{-1}\left(\frac{-19}{\sqrt{5}\times\sqrt{65}}\right) \simeq \underline{146{,}3^\circ}$ (calculatrice)