CORRIGÉ

Première 6S	**Contrôle de mathématiques** *Equations trigonométriques/Produit scalaire*	Fait 6 29/05/15

1

– Calculatrices autorisées
– Durée : 45 min

Observations :

NOTE :

Exercice 1 : (A compléter directement sur le sujet) /5

1) Résoudre sur [0;2π[l'équation suivante :

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

On a $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ - Résolution sur $\mathbb{R}$:

$x = \frac{5\pi}{6}[2\pi]$ ou $-\frac{5\pi}{6}[2\pi]$

Sur $[0;2\pi[$: $S = \left\{\frac{5\pi}{6} ; -\frac{5\pi}{6}+2\pi = \frac{7\pi}{6}\right\} = \left\{\frac{5\pi}{6} ; \frac{7\pi}{6}\right\}$ 2

2) Résoudre dans [-π ; π[, l'équation suivante :

$$\sqrt{2}\,\sin(2x) = 1$$

$\sqrt{2}\sin(2x) = 1 \iff \sin(2x) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ - Résolution dans $\mathbb{R}$:

$2x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

ou $2x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

$\iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\pi, k\in\mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \frac{3\pi}{8} + k\pi, k\in\mathbb{Z} \end{cases}$ D'où dans $[-\pi;\pi[$:

$S = \left\{\frac{\pi}{8} ; \frac{3\pi}{8} ; -\frac{7\pi}{8} ; -\frac{5\pi}{8}\right\}$ 3

/15 **Exercice 2 :** ***(Les questions de cet exercice sont indépendantes)***

Répondre aux questions suivantes et justifier directement sur le sujet :

1) On considère la droite (d_1) : $3x - 2y + 5 = 0$

Déterminer une équation cartésienne de la droite (d_2) telle que $(d_2) \perp (d_1)$ et $A(-3;4)\in(d_2)$

Soit $\vec{u}(2;3)$ vecteur directeur de (d_1)

Comme $(d_2)\perp(d_1)$, $\vec{u}$ est un vecteur normal à (d_2) 3

D'où une équation cartésienne de (d_2) est :

$(d_2) : 2x + 3y + c = 0$ - Or, $A\in(d_2)$ d'où $2\times(-3)+3\times 4 + c = 0$

$\iff c = -6$

Donc : $(d_2) : 2x + 3y - 6 = 0$

2) a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ sachant que A(-2;3) , B(8;-1) , C(1;2) et D(4;-3) dans un repère orthonormé du plan :

$\overrightarrow{AB}(8-(-2) ; -1-3)$ $\overrightarrow{CD}(x_D - x_C ; y_D - y_C)$
$(10 ; -4)$ $(4-1 ; -3-2)$
$(3 ; -5)$

d'où : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 10 \times 3 + (-4) \times (-5)$
$= 30 + 20$
$= \boxed{50}$

1,5

b) Déterminer une équation ~~cartésienne~~ du cercle de diamètre [BD]

Soit $M(x;y)$ appartenant à ce cercle : $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$

Or, $\overrightarrow{MB}(8-x ; -1-y)$ $\overrightarrow{MD}(4-x ; -3-y)$, $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$

$\Leftrightarrow (8-x)(4-x) + (-1-y)(-3-y) = 0$

1,5 $\Leftrightarrow 32 - 12x + x^2 + 3 + 4y + y^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 12x + 4y + 35 = 0$

3) Soit l'ensemble des points M(x;y) du plan tels que $x^2 + y^2 - 6x + 5y + \frac{58}{4} = 0$

Montrer que l'ensemble cherché est un cercle. Déterminer les coordonnées de son centre et son rayon :

$x^2 - 6x + y^2 + 5y = -\frac{58}{4} \Leftrightarrow (x-3)^2 - 9 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = -\frac{58}{4}$

3 $\Leftrightarrow (x-3)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{61}{4} - \frac{58}{4} = \frac{3}{4}$

L'ensemble cherché est le cercle de centre $I\left(3 ; -\frac{5}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4) Soient E(2;-3) , F(1;5) et G(2;7) dans un repère orthonormé du plan. Calculer en degrés une mesure de l'angle $\widehat{EFG}$ à 0,1 près

On a $\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{FG} = \|\overrightarrow{FE}\| \times \|\overrightarrow{FG}\| \times \cos \widehat{EFG}$. Or, $\|\overrightarrow{FE}\| = \sqrt{(x_E - x_F)^2 + (y_E - y_F)^2}$

$\|\overrightarrow{FG}\| = \sqrt{(x_G - x_F)^2 + (y_G - y_F)^2} = \sqrt{1^2 + 2^2}$ $= \sqrt{1^2 + (-8)^2}$ 3
$= \sqrt{5}$ $= \sqrt{65}$

D'où $\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{FG} = \sqrt{5} \times \sqrt{65} \times \cos \widehat{EFG} = 5\sqrt{13} \times \cos \widehat{EFG}$

Or,
$\overrightarrow{FE}(1 ; -8)$
$\overrightarrow{FG}(1 ; 2)$

d'où : $\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{FG} = 1 - 16 = -15$

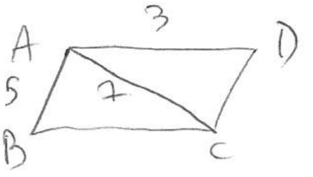
Donc : $-15 = 5\sqrt{13} \cos \widehat{EFG}$

$\Leftrightarrow \cos \widehat{EFG} = -\frac{15}{5\sqrt{13}} = -\frac{3}{\sqrt{13}}$

A la calculatrice,
$\widehat{EFG} \simeq 146,3°$

5) ABCD est un parallélogramme avec AB = 5 , AD = 3 et AC = 7.

Montrer que le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{15}{2}$



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AD}\|^2\right]$

$= \frac{1}{2}\left[49 - 25 - 9\right]$

Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{15}{2}$

3