Corrigé de la feuille de permanence n°3

Exercice 1 :

$$f(x) = x^4 - 10x^3 + 29x^2 - 32x + 12$$

1) $\underline{(x^2-3x+2)(x^2-7x+6)} = x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 3x^3 + 21x^2 - 18x + 2x^2 - 14x + 12$
$= x^4 - 10x^3 + 29x^2 - 32x + 12 = \underline{f(x)}$

2) x est un antécédent de 0 par $f \Leftrightarrow f(x) = 0$.
$\Leftrightarrow (x^2-3x+2)(x^2-7x+6) = 0$
$\Leftrightarrow x^2-3x+2 = 0$ ou $x^2-7x+6=0$

Soit (E_1) : $x^2-3x+2=0$ ou (E_2) : $x^2-7x+6=0$

Pour (E_1) : $\Delta = b^2 - 4ac$
$= (-3)^2 - 4\times 2$
$= 9 - 8 = 1 > 0$

L'équation admet deux solutions :
$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+1}{2} = 2$
et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-1}{2} = 1$

Pour (E_2) :
$\Delta = b^2 - 4ac$
$= (-7)^2 - 4\times 6$
$= 49 - 24$
$= 25 > 0$

L'équation admet deux solutions :
$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7+5}{2} = 6$
et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7-5}{2} = 1$

Donc $\underline{S = \{1 ; 2 ; 6\}}$

3) $f(x) > 0 \Leftrightarrow (x^2-3x+2)(x^2-7x+6) > 0$
Chacun des trinômes est du signe de $\underset{1>0}{a}$ à l'extérieur de ses racines.

D'où $x^2-3x+2 \geq 0$ pour $x \in]-\infty ; 1] \cup [2 ; +\infty[$
et $x^2-7x+6 \geq 0$ pour $x \in]-\infty ; 1] \cup [6 ; +\infty[$

D'où le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	1		2		6		$+\infty$
signe de x^2-3x+2	+	0	−	0	+		+	
signe de x^2-7x+6	+	0	−		−	0	+	
signe de $f(x)$	+	0	+	0	−	0	+	

L'inéquation $f(x) > 0$ a pour solutions

$\underline{S =]-\infty ; 1[\cup]1 ; 2[\cup]6 ; +\infty[}$

Exercice 2 :

1) $f(x) = |5x^2 - 3x + 1|$ $\quad$ $D_f = \mathbb{R}$

2) $g(x) = \sqrt{4x-3}$ $\quad$ g est définie si et seulement si $4x - 3 \geqslant 0$
si et seulement si $x \geqslant \frac{3}{4}$

D'où $D_g = \left[\frac{3}{4} ; +\infty\right[$

3) $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x+8}}$ $\quad$ h est définie si et seulement si $3x + 8 > 0$
si et seulement si $x > -\frac{8}{3}$

D'où $D_h = \left]-\frac{8}{3} ; +\infty\right[$

4) $i(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 10}$ $\quad$ i est définie si et seulement si $x^2 - 3x - 10 \geqslant 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$
$= 9 + 40 = 49 > 0$ d'où le binôme admet deux racines : $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3+7}{2}$
$= 5$

et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3-7}{2}$
$= -2$

Le binôme est du signe de a à l'extérieur des racines. Or $a = 1 > 0$.

Donc $D_i =]-\infty ; -2] \cup [5 ; +\infty[$

5) $j(x) = \dfrac{x-7}{\sqrt{3x^2 - 24x + 48}}$ $\quad$ j est définie si et seulement si $3x^2 - 24x + 48 > 0$

calcul de Δ : $\Delta = b^2 - 4ac$
$= (24)^2 - 4 \times 3 \times 48$
$= 0$ d'où le binôme est toujours du

signe de a ~~et~~ s'annule en $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{24}{6} = 4$. Or, $a = 3 > 0$

Donc $D_j = \mathbb{R} \setminus \{4\}$

Exercice 3 :

1) $f(x) = |6x + 1|$ $\quad$ $6x + 1 \geqslant 0 \iff x \geqslant -\frac{1}{6}$

D'où : $f(x) = \begin{cases} 6x+1, & \text{pour } x \in \left[-\frac{1}{6} ; +\infty\right[\\ -6x-1, & \text{pour } x \in \left]-\infty ; -\frac{1}{6}\right] \end{cases}$

2) $g(x) = \left|\dfrac{9x+2}{x-2}\right|$ $\quad$ $9x + 2 \geqslant 0$ $\quad$ $x - 2 \geqslant 0$
$x \geqslant -\frac{2}{9}$ $\quad$ $x \geqslant 2$

Tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{9}$		2		$+\infty$
$9x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{9x+2}{x-2}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

D'où $g(x) = \begin{cases} \dfrac{9x+2}{x-2}, & \text{pour } x \in \left]-\infty ; -\frac{2}{9}\right] \cup \left]2 ; +\infty\right[\\ -\dfrac{9x+2}{x-2}, & \text{pour } x \in \left[-\frac{2}{9} ; 2\right[\end{cases}$

3) $h(x) = |2x^2 - 5x + 4|$

Considérons le binôme $2x^2 - 5x + 4$:

$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4 \times 2 \times 4$
$= 25 - 32$
$= -7 < 0$ d'où le binôme est toujours du signe de a.

Or, $a = 2 > 0$. D'où $2x^2 - 5x + 4 > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Donc : $h(x) = 2x^2 - 5x + 4$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4) $i(x) = |3x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}|$. Considérons le binôme : $3x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$\Delta = b^2 - 4ac = \frac{1}{4} + 12 \times \frac{1}{2} = \frac{25}{4} > 0$ d'où le binôme a deux racines

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{5}{2}}{6} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{1}{2}-\frac{5}{2}}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$

Le binôme est du signe de a à l'extérieur des racines. Or $a = 3 > 0$

D'où $3x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \geq 0$ pour $x \in]-\infty; -\frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{2}; +\infty[$

$3x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} < 0$ pour $x \in]-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}[$

Donc :
$$\boxed{i(x) = \begin{cases} 3x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, & \text{pour } x \in]-\infty; -\frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{2}; +\infty[\\ -3x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, & \text{pour } x \in]-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}[\end{cases}}$$

Exercice 4 : a) $|x-5| = 2$ $\begin{cases} x - 5 = 2 \\ \text{ou} \\ -x+5 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ \text{ou} \\ x = 5-2 = 3 \end{cases}$

Donc $\boxed{S = \{7; 3\}}$

b) $|3x - 6| = -5$ or $|3x-6| \geq 0$ (valeur absolue toujours positive ou nulle)

Donc $\boxed{S = \emptyset}$

c) $|4x+1| = |9x-8|$ 2 cas possibles

1 $4x+1 = 9x-8$
$\Leftrightarrow -5x = -9$
$\Leftrightarrow x = \frac{9}{5}$

2 $-4x-1 = 9x-8$
$\Leftrightarrow -13x = -7$
$\Leftrightarrow x = \frac{7}{13}$

$\boxed{S = \{\frac{9}{5}; \frac{7}{13}\}}$